

$bx+1 \leq 0$, 则 $g'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

若 $-\frac{1}{b} > 1$, 即 $-1 < b < 0$, 当 $x \in$

$\left[1, -\frac{1}{b}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(-\frac{1}{b}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

综上所述: 当 $b \geq 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $b \leq -1$ 时, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $-1 < b < 0$ 时, $g(x)$ 在 $\left[1, -\frac{1}{b}\right)$ 上单

调递增, 在 $\left(-\frac{1}{b}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(2) 【证明】当 $b=1$ 时, $g(x)=x+\ln x$, 要证 $f(x) \geq g(x)+1$, 即证 $x(e^{2x}-a)-(x+\ln x) \geq 1$,

又因为 $a \leq 1$, 所以 $-a \geq -1$, 所以 $e^{2x}-a \geq e^{2x}-1$, 又 $x > 0$, 即证 $x(e^{2x}-1)-(x+\ln x) \geq 1$.

☞ 悟: 放缩法的应用

$\ln x) \geq 1$.

设 $\varphi(x) = x(e^{2x}-1)-(x+\ln x) = xe^{2x}-2x-\ln x (x>0)$,

则 $\varphi'(x) = (2x+1)\left(e^{2x}-\frac{1}{x}\right)$,

设 $m(x) = e^{2x}-\frac{1}{x} (x>0)$,

所以 $m'(x) = 2e^{2x}+\frac{1}{x^2} > 0$, 且 $m\left(\frac{1}{4}\right) =$

$\sqrt{e}-4 < 0, m(1) = e^2-1 > 0$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, 使 $m(x_0) = 0$, 即

使 $\varphi'(x_0) = (2x_0+1)\left(e^{2x_0}-\frac{1}{x_0}\right) = 0$, 即

$e^{2x_0}-\frac{1}{x_0} = 0$,

则 $\ln e^{2x_0} = \ln \frac{1}{x_0}$, 即 $2x_0 = \ln \frac{1}{x_0} =$

$-\ln x_0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(x_0) = x_0 e^{2x_0} - 2x_0 -$

$\ln x_0 = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 2x_0 + 2x_0 = 1$,

所以 $\varphi(x) \geq 1$, 得证.

多种解法

(2) 当 $a \leq 1$ 时, $f(x) \geq$

$x(e^{2x}-1) (x>0)$, 当 $b=1$ 时, $g(x) =$

$x+\ln x$, 即证 $xe^{2x}-x \geq x+1+\ln x$,

即证 $e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x) \geq 1$,

令 $t = 2x+\ln x (t \in \mathbf{R})$, 令 $h(t) = e^t - t$

$(t \in \mathbf{R})$,

则 $h'(t) = e^t - 1$, 由 $h'(t) = 0$ 得 $t = 0$,

当 $t < 0$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减,

当 $t > 0$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调递增,

则 $h(t) \geq h(0) = e^0 - 0 = 1$,

即 $e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x) \geq 1$, 得证.

6.3 利用导数解决实际问题

刷基础

1. D 【解析】设两段长分别为 x cm, $(12-x)$ cm, 其中 $0 < x < 12$, 则这两个正

三角形的边长分别为 $\frac{x}{3}$ cm, $\frac{12-x}{3}$ cm, 面

积之和为 $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(\frac{x}{3}\right)^2 +$

$\left(4-\frac{x}{3}\right)^2 \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{8x}{3} + 16 \right)$. 则

$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}x - \frac{8}{3} \right)$, 令 $S'(x) =$

0, 解得 $x = 6$. 当 $0 < x < 6$ 时, $S'(x) < 0$,

当 $6 < x < 12$ 时, $S'(x) > 0$. 则 $x = 6$ 是

$S(x)$ 的极小值点, 也是最小值点, 所以

$S(x)_{\min} = S(6) = 2\sqrt{3}$ cm².

2. C 【解析】设该圆柱底面半径长为 r 千米, 则圆柱底面的周长为 $2\pi r$ 千米, 圆柱的母线长为 $\frac{1-4\pi r}{8}$ 千米,

由 $1-4\pi r > 0$, 解得 $r < \frac{1}{4\pi}$,

$\therefore$ 圆柱的体积 $V(r) = \pi r^2 \times \frac{1-4\pi r}{8} =$

$\frac{\pi(r^2-4\pi r^3)}{8}, 0 < r < \frac{1}{4\pi}$,

$\therefore V'(r) = \frac{\pi(2r-12\pi r^2)}{8} = \frac{\pi r(1-6\pi r)}{4}$.

令 $V'(r) = 0$, 即 $\pi r(1-6\pi r) = 0$, 解得

$r = \frac{1}{6\pi}$,

$\therefore$ 当 $0 < r < \frac{1}{6\pi}$ 时, $V'(r) > 0$, $V(r)$ 单调递

增; 当 $\frac{1}{6\pi} < r < \frac{1}{4\pi}$ 时, $V'(r) < 0$, $V(r)$ 单调

递减,

$\therefore$ 当 $r = \frac{1}{6\pi}$ 千米时, $V(r)$ 取到最大值.

3. 144 【解析】设小正方形的边长为 x cm,

则盒子的容积 $V = (10-2x)(16-2x)x =$

$4x^3 - 52x^2 + 160x (0 < x < 5)$,

$V' = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x-20)(x-2)$.

当 $0 < x < 2$ 时, $V' > 0$, 当 $2 < x < 5$ 时,

$V' < 0$.

所以 $x = 2$ 时, V 取得极大值, 也是最大

值, $V_{\max} = (10-4) \times (16-4) \times 2 =$

144 (cm³), 故答案为 144.

4. 【解】(1) 由 $PO_1 = 2$ m 知 $O_1O = 4PO_1 =$

8 m. 因为 $A_1B_1 = AB = 6$ m,

所以正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{\text{锥}} =$

$\frac{1}{3} \cdot A_1B_1^2 \cdot PO_1 = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 = 24$ (m³);

正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{\text{柱}} =$

$AB^2 \cdot O_1O = 6^2 \times 8 = 288$ (m³).

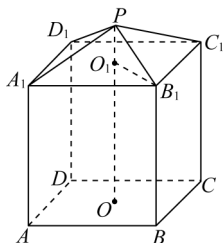
所以仓库的容积 $V = V_{\text{锥}} + V_{\text{柱}} = 24 +$

$288 = 312$ (m³).

(2) 设 $A_1B_1 = a$ m, $PO_1 = h$ m, 则 $0 < h <$

$6, O_1O = 4h$ m.

如图, 连接 O_1B_1 .



因为在 Rt $\triangle PO_1B_1$ 中, $O_1B_1^2 + PO_1^2 =$

PB_1^2 , 所以 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + h^2 = 36$, 即 $a^2 =$

$2(36-h^2)$.

仓库的容积 $V = V_{\text{柱}} + V_{\text{锥}} = a^2 \cdot 4h + \frac{1}{3}a^2 \cdot$

$h = \frac{13}{3}a^2h = \frac{26}{3} \cdot (36-h^2)h$, 其中 $0 < h < 6$,

从而 $V' = \frac{26}{3}(36-3h^2) = 26(12-h^2)$.

令 $V' = 0$, 得 $h = 2\sqrt{3}$ 或 $h = -2\sqrt{3}$ (舍),

当 $0 < h < 2\sqrt{3}$ 时, $V' > 0$, 当 $2\sqrt{3} < h < 6$

时, $V' < 0$,

故当 $h = 2\sqrt{3}$ 时, V 取得极大值, 也是最大

值. 所以当 $PO_1 = 2\sqrt{3}$ m 时, 仓库的容积

最大.

5. C 【解析】设圆柱形蓄水池的底面半径为 r , 高为 h , 表面积为 y ,

则由题意有 $V = \pi r^2 h$, 所以 $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

则蓄水池的表面积 $y = \pi r^2 + 2\pi r h =$

$\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2V}{r} (r > 0)$.

则 $y' = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(\pi r^3 - V)}{r^2}$, 令 $y' = 0$,

解得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

当 $r \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$ 时, $y' < 0$, 当 $r \in$

$\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, +\infty\right)$ 时, $y' > 0$, 故当 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

时表面积取得最小值, 即所用的材料最省.

故选 C.

6. 25 【解析】由题可知池底面积为 $\frac{2500}{2} =$

1250 , 为定值, 即池底维修费

用为定值, 则泳池维修费用由池壁维修

费用决定.

又 x 表示较短池壁长, 则 $0 < x \leq \frac{2500}{2x}$

$\Rightarrow 0 < x \leq 25\sqrt{2}$, 则池壁维修费用

表达式为 $2x \times \frac{4k}{25} + \frac{2500k}{x^2}$.

设 $f(x) = \frac{8k}{25}x + \frac{2500k}{x^2}, 0 < x \leq 25\sqrt{2}$, 则

$f'(x) = \frac{8k}{25} - \frac{5000k}{x^3} =$

$$\frac{8kx^3 - 125\,000k}{25x^3}.$$

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 25$, 则 $f'(x) > 0 \Rightarrow 25 < x \leq 25\sqrt{2}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 25$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 25)$ 上单调递减, 在 $(25, 25\sqrt{2}]$ 上单调递增, 即 $f(x)_{\min} = f(25)$. 故当泳池的维修费用最低时, x 的值为 25.

7. B 【解析】由题意, 利润函数 $g(x) = \frac{1}{6}x^3 + ax^2 + x - (2+x) (0 \leq x \leq 10)$, 即 $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + ax^2 - 2$, 则 $\frac{23}{2} = -\frac{1}{6} \times 3^3 + 9a - 2$, 解得 $a = 2$.

故 $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 2$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x = -\frac{1}{2}x(x-8)$.

令 $g'(x) > 0$, 则有 $0 < x < 8$, 令 $g'(x) < 0$, 则有 $8 < x \leq 10$, 所以 $g(x)$ 的极大值点即最大值点, 为 $x = 8$, 故要使销售利润最大, 每年需种植莲藕 8 吨. 故选 B.

8. $\frac{3}{2}$ 【解析】设投入 m 千元 ($0 \leq m \leq 5$) 销售 B 商品, 则投入 $(5-m)$ 千元销售 A 商品, 所获得的总收益为 $S(m)$ 千元, 则 $S(m) = 2(5-m) + 4\ln(2m+1) = 4\ln(2m+1) - 2m + 10 (0 \leq m \leq 5)$, 可得 $S'(m) = 4 \times \frac{2}{2m+1} - 2 = \frac{6-4m}{2m+1}$.

当 $0 \leq m < \frac{3}{2}$ 时, $S'(m) > 0$, 函数 $S(m)$ 单调递增;

当 $\frac{3}{2} < m \leq 5$ 时, $S'(m) < 0$, 函数 $S(m)$ 单调递减.

所以当 $m = \frac{3}{2}$ 时, 函数 $S(m)$ 取得最大值, 即总收益最大.

刷能力

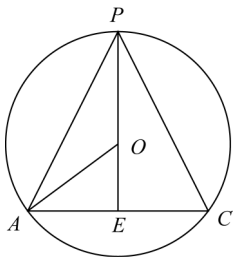
1. C 【解析】 $y' = -x^2 + 81, x > 0$, 令 $y' = 0$, 解得 $x = 9$, 所以当 $x \in (0, 9)$ 时, $y' > 0$, y 单调递增; 当 $x \in (9, +\infty)$ 时, $y' < 0$, y 单调递减. 所以当 $x = 9$ 时, 年利润 y 取得最大值, 所以使该生产厂家获得最大年利润的年产量为 9 万件. 故选 C.

2. A 【解析】如图, $\triangle PAC$ 是正四棱锥 $P-ABCD$ 的对角面, 其外接圆是四棱锥外接球的大圆, O 是圆心(球心), 设正四棱锥的底面边长为 a , 则 $AC = \sqrt{2}a, OA = OP = 3$, 设 $OE = x (0 < x < 3)$, 则由 $AO^2 = OE^2 + AE^2$ 得 $x^2 + \frac{1}{2}a^2 = 9$, $a^2 = 18 - 2x^2, PE = 3 + x$, 四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD} = 18 - 2x^2$, 正四棱锥的体积 $V(x) = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PE =$

$$\frac{1}{3}(18 - 2x^2)(3 + x) = \frac{2}{3}(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27),$$

$$V'(x) = \frac{2}{3}(-3x^2 - 6x + 9) = -2(x-1) \cdot (x+3), \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } V'(x) > 0, V(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递增, 当 } 1 < x < 3 \text{ 时, } V'(x) < 0, V(x) \text{ 在 } (1, 3) \text{ 上单调递减, 所以当 } x = 1 \text{ 时, } V(x) \text{ 取得极大值也是最大值 } V(x)_{\max} = \frac{64}{3}.$$

此时高 $PE = 4, a = \sqrt{18 - 2 \times 1^2} = 4, \frac{PE}{a} = 1$. 故选 A.



名师点拨 解题关键是引入变量 $OE = x$, 把棱锥体积 V 表示为 x 的函数, 利用导数求得最大值.

3. D 【解析】记这三种截面的周长为 $C (C > 0)$, 则 $C = 2\pi r = 4m = 2(a+b)$, 则 $W_1 = \frac{\pi}{4}r^3 = \frac{C^3}{32\pi^2}, W_2 = \frac{1}{6}m^3 = \frac{C^3}{384}, W_3 = \frac{1}{6}ba^2 = \frac{1}{6}\left(-a^3 + \frac{C}{2}a^2\right)$. 由 $b < a < 2b$, 得 $\frac{C}{4} < a < \frac{C}{3}$.

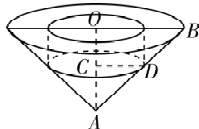
令 $f(x) = -x^3 + \frac{C}{2}x^2, \frac{C}{4} < x < \frac{C}{3}$, 则 $f'(x) = -3x^2 + Cx = -x(3x - C)$,

则 $f'(x) > 0$ 在 $\left(\frac{C}{4}, \frac{C}{3}\right)$ 上恒成立, 故

$f(x)$ 在 $\left(\frac{C}{4}, \frac{C}{3}\right)$ 上单调递增.

因为 $f\left(\frac{C}{4}\right) = \frac{C^3}{64}, f\left(\frac{C}{3}\right) = \frac{C^3}{54}$, 所以 $\frac{C^3}{384} < W_3 < \frac{C^3}{324}$. 因为 $32\pi^2 < 324$, 所以 $W_2 < W_3 < W_1$. 故选 D.

4. BC 【解析】由圆锥的轴截面为面积是 16 cm^2 的等腰直角三角形, 可算出该三角形直角边长为 $4\sqrt{2} \text{ cm}$, 斜边长为 8 cm , 如图所示.



则圆锥母线长 $AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, 高 $AO = 4 \text{ cm}$, 底面半径 $BO = 4 \text{ cm}, \angle OAB = 45^\circ$. 设冰块底面半径 $CD = r (0 < r < 4)$, 高为 h ,

由题可得 $AC = CD = r$, 若冰块的体积最大, 则冰块的高度 $h = OC = 4 - r$, 故冰块的体积 $V(r) = \pi r^2(4 - r)$, 其中 $0 < r < 4$, 则有 $V'(r) = \pi(8r - 3r^2)$,

令 $V'(r) > 0$, 解得 $0 < r < \frac{8}{3}$; 令 $V'(r) < 0$, 解得 $\frac{8}{3} < r < 4$,

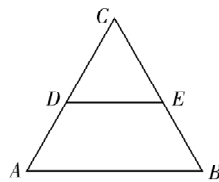
则 $V(r) = \pi r^2(4 - r)$ 在区间 $\left(0, \frac{8}{3}\right)$ 上单调递增, 在区间 $\left(\frac{8}{3}, 4\right)$ 上单调递减,

所以当 $r = \frac{8}{3} \text{ cm}$ 时, 冰块的体积最大, 最大值为 $V\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256\pi}{27} \text{ cm}^3$, 此时冰块高度 $h = \frac{4}{3} \text{ cm}$.

故选 BC.

5. $a < b$ 【解析】按年计息: $a = p(1+r)(r > 0)$, 按月计息: $b = p\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} (r > 0)$, 则 $a - b = p(1+r) - p\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} = p\left[(1+r) - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}\right]$. 令 $f(r) = p \cdot \left[(1+r) - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}\right] (r > 0), f'(r) = p \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{11}\right] < 0$, 所以 $f(r) < f(0) = 0$, 故 $a < b$.

6. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ 【解析】如图, 设 $CD = x (0 < x < 1)$,



则梯形 $ABED$ 的周长为 $x + 2(1-x) + 1 = 3 - x$,

梯形 $ABED$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CDE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$, 所以 $S = \frac{(3-x)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)} = \frac{4(3-x)^2}{\sqrt{3}(1-x^2)}$, 则

$$S' = -\frac{8(x-3)(3x-1)}{\sqrt{3}(1-x^2)^2},$$

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $S' < 0$, 函数 $S = \frac{4(3-x)^2}{\sqrt{3}(1-x^2)}$ 单调递减,

当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $S' > 0$, 函数 $S = \frac{4(3-x)^2}{\sqrt{3}(1-x^2)}$ 单调递增,

故当 $x = \frac{1}{3}$ 时, S 取得最小值 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

7. 【解】(1) 由题意得 $\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 l = \frac{8\pi}{3}$,

则 $l = \frac{8-4r^3}{3r^2}$, 且 $0 < r \leq 1$,

所以 $y = 2\pi r l + \frac{4}{3} \times 4\pi r^2 = 2\pi r l + \frac{16\pi r^2}{3} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2-r^3}{r} l + 2r^2 \right)$, 且 $r \in$

$(0, 1]$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } y' = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{-3r^2 r - (2-r^3)}{r^2} t + 4r \right] = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{-2-2r^3}{r^2} t + 4r \right) = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{(-2-2r^3)t + 4r^3}{r^2} = \frac{16\pi(2-t)}{3r^2} \left(r^3 - \frac{t}{2-t} \right), \text{ 且 } 0 < r \leq 1,$$

$$\text{令 } y' = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{t}{2-t}.$$

当 $\frac{t}{2-t} \geq 1$ 即 $1 \leq t < 2$ 时, 在 $(0, 1]$ 上 $y' \leq 0$ 恒成立 (等号不恒成立), 即 y 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 故 $r=1$ 时取 $y_{\min}$;

当 $\frac{t}{2-t} < 1$ 即 $0 < t < 1$ 时, 在 $(0, \sqrt{\frac{t}{2-t}})$ 上 $y' < 0$, 则 y 在 $(0, \sqrt{\frac{t}{2-t}})$ 上单调递减,

在 $(\sqrt{\frac{t}{2-t}}, 1)$ 上, $y' > 0$, 则 y 在 $(\sqrt{\frac{t}{2-t}}, 1)$ 上单调递增, 故 $r = \sqrt{\frac{t}{2-t}}$ 时取 $y_{\min}$.

综上, 若 $0 < t < 1$, 则 $r = \sqrt{\frac{t}{2-t}}$ 时该容器的总建造费用最少;

若 $1 \leq t < 2$, 则 $r=1$ 时该容器的总建造费用最少.

刷难关

1. D 【解析】 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $y' = \frac{1}{x}$.

$y = \ln(x-1) + 1$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 则 $y' = \frac{1}{x-1}$.

设公切线与曲线 $y = \ln x$ 相切于点 $(x_1, \ln x_1)$, 则公切线方程为 $y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x}{x_1} + \ln x_1 - 1$.

设公切线与曲线 $y = \ln(x-1) + 1$ 相切于点 $(x_2, \ln(x_2-1) + 1)$, 则公切线方程为 $y - [\ln(x_2-1) + 1] = \frac{1}{x_2-1}(x - x_2)$,

$$\text{即 } y = \frac{x}{x_2-1} - \frac{x_2}{x_2-1} + [\ln(x_2-1) + 1].$$

由题意知,

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2-1}, \\ \ln x_1 - 1 = -\frac{x_2}{x_2-1} + [\ln(x_2-1) + 1], \end{cases}$$

悟: 公切线的斜率相等, 方程相同

$$\text{由 } \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2-1}, \text{ 得 } x_1 = x_2 - 1,$$

代入另一个方程解得 $x_2 = 2$, 则 $x_1 = 1$.

代入 $y = \frac{x}{x_1} + \ln x_1 - 1$ 中, 得 $y = x - 1$, 即

所求公切线方程是 $x - y - 1 = 0$. 故选 D.

规律方法 设公切线 l 与曲线 $y = f(x)$ 的切点为 $P_1(x_1, f(x_1))$, 与曲线 $y = g(x)$ 的切点为 $P_2(x_2, g(x_2))$, 则必定满足两切线的斜率相同, 且两切点都在直线 l 上, 从而得到关于 x_1 和 x_2 的方程组, 消去 x_1 或 x_2 得关于 x_2 或 x_1 的方程, 解方程进而求得公切线的方程.

2. C 【解析】设公切线与曲线 $y = e^{x-1}$ 的切点为 (x_1, e^{x_1-1}) , 与曲线 $y = x^2$ 的切点为 (x_2, x_2^2) ,

$$\text{因为 } (e^{x-1})' = e^{x-1}, (x^2)' = 2x,$$

所以曲线 $y = e^{x-1}$ 在 (x_1, e^{x_1-1}) 处的切线方程为 $y = e^{x_1-1}(x - x_1) + e^{x_1-1}$, 即 $y = e^{x_1-1}x + (1 - x_1)e^{x_1-1}$,

曲线 $y = x^2$ 在 (x_2, x_2^2) 处的切线方程为 $y = 2x_2(x - x_2) + x_2^2$, 即 $y = 2x_2x - x_2^2$,

专题5 曲线的公切线问题

$$\text{所以 } \begin{cases} e^{x_1-1} = 2x_2, \\ (1-x_1)e^{x_1-1} = -x_2^2, \end{cases} \text{ 故 } (x_1-1) \cdot$$

$$e^{x_1-1} = x_2^2 = \left(\frac{e^{x_1-1}}{2}\right)^2, \text{ 即 } 4(x_1-1) = e^{x_1-1}.$$

令 $x_1 - 1 = t$, 构造 $f(t) = 4t - e^t$, 则 $f'(t) = 4 - e^t$,

当 $t < \ln 4$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 在区间 $(-\infty, \ln 4)$ 上单调递增,

当 $t > \ln 4$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 在区间 $(\ln 4, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(t)_{\max} = f(\ln 4) = 4(\ln 4 - 1) > 0$, 且当 $t \rightarrow -\infty$, $f(t) \rightarrow -\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$, $f(t) \rightarrow -\infty$,

故 $f(t) = 4t - e^t = 0$ 有两个不相等的实数根,

故公切线的条数为 2. 故选 C.

3. 【解】(1) $\because f(x) = x^2 + x, \therefore f'(x) = 2x + 1, f'(0) = 1$.

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = x$.

(2) 设曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 的公共点为 $P(x_0, y_0)$,

$$\therefore f(x) = x^2 + x, g(x) = \ln x + 2x,$$

$$\therefore f'(x) = 2x + 1, g'(x) = \frac{1}{x} + 2,$$

$$\text{令 } f'(x_0) = g'(x_0), \text{ 即 } 2x_0 + 1 = \frac{1}{x_0} + 2,$$

黑板: 根据公切线的斜率相等求解

$$\text{解得 } x_0 = 1 \text{ 或 } x_0 = -\frac{1}{2} \text{ (舍)}, \therefore P(1,$$

$$2), f'(1) = 3,$$

$$\therefore \text{ 所求公切线方程为 } y - 2 = 3(x - 1), \text{ 即 } 3x - y - 1 = 0.$$

4. C 【解析】设直线 $l: y = mx - 2$ 与曲线 $y = 2\ln x$ 的切点为 $(a, 2\ln a)$,

$$\text{由 } (2\ln x)' = \frac{2}{x}, \text{ 得 } \frac{2}{a} = m, \text{ 即 } ma = 2,$$

$$\text{而 } ma - 2 = 2\ln a, \text{ 故 } 2\ln a = 0 \Rightarrow a = 1, \text{ 所}$$

悟: 切点同时在曲线及其切线上

以 $m = 2$.

设直线 $l: y = mx - 2$ 与曲线 $y = e^x + n$ 的切点为 $(b, e^b + n)$,

由 $(e^x + n)' = e^x$, 得 $e^b = m$, 则 $b = \ln m = \ln 2$, 而 $mb - 2 = e^b + n$, 故 $2\ln 2 - 2 = 2 + n$, 所以 $n = 2\ln 2 - 4$. 故选 C.

5. A

思路导引 设公切线分别与 $f(x)$, $g(x)$ 图象的切点坐标, 由导数几何意义, 斜率公式列出方程并化简, 分离出 a 后构造函数, 利用导数求出函数的单调区间、最值, 即可求出实数 a 的取值范围.

【解析】设公切线与 $f(x) = 2x^2 + 2$ 的图象切于点 $(x_1, 2x_1^2 + 2)$,

与曲线 $g(x) = ae^x + 2$ 切于点 $(x_2, ae^{x_2} + 2)$, 因为 $f'(x) = 4x$, $g'(x) = ae^x$, 所以

$$4x_1 = ae^{x_2} = \frac{(ae^{x_2} + 2) - (2x_1^2 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{ae^{x_2} - 2x_1^2}{x_2 - x_1},$$

$$\text{化简可得 } 4x_1 = \frac{4x_1 - 2x_1^2}{x_2 - x_1}, \text{ 解得 } x_1 = 0 \text{ 或}$$

$$2x_2 = x_1 + 2, \therefore 4x_1 = ae^{x_2}, \text{ 且 } a > 0,$$

$$\therefore x_1 > 0, \text{ 则 } 2x_2 = x_1 + 2 > 2, \text{ 即 } x_2 > 1, \text{ 且}$$

$$a = \frac{4x_1}{e^{x_2}} = \frac{8(x_2 - 1)}{e^{x_2}},$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{8(x-1)}{e^x} (x > 1), \text{ 则 } h'(x) =$$

$$\frac{8(2-x)}{e^x}, \text{ 则当 } 1 < x < 2 \text{ 时 } h'(x) > 0, \text{ 当}$$

$$x > 2 \text{ 时 } h'(x) < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore h(x)_{\max} = h(2) = \frac{8}{e^2}, \text{ 当 } x \rightarrow 1 \text{ 时},$$

$$h(x) \rightarrow 0, \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}, h(x) \rightarrow 0,$$

$$\therefore \text{ 实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{8}{e^2}\right].$$

故选 A.

6. 【解】(1) 令 $x = 0$, 则 $f(0) = [f'(0) - 1] \cdot e^0$, 即 $f(0) = f'(0) - 1$.

对 $f(x)$ 求导可得 $f'(x) = [f'(0) - 1] \cdot e^x + f(0)$, 令 $x = 0$, 可得 $f(0) = 1$, 所以 $f'(0) = 2$, 即 $f(x) = e^x + x$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = e^x + x, f'(x) = e^x + 1$, 设切点为 $(x_0, e^{x_0} + x_0)$, 则 $f'(x_0) = e^{x_0} + 1$, 切线 l 的方程为 $y - e^{x_0} - x_0 = (e^{x_0} + 1) \cdot (x - x_0)$.

因为切线 l 经过坐标原点, 所以 $-e^{x_0} - x_0 = -x_0(e^{x_0} + 1)$, 解得 $x_0 = 1$, 故切线 l 的方程为 $y - e - 1 = (e + 1)(x -$

1), 即 $y = (e+1)x$.

(3) 由题知 $y = f(x+a) - a = e^{x+a} + x$.

设直线 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$, l_1 与曲线 $y = e^{x+a} + x, y = x^2 + x$ 的切点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

对 $y = e^{x+a} + x$ 求导得 $y'_1 = e^{x+a} + 1$, 则曲线 $y = e^{x+a} + x$ 在点 (x_1, y_1) 处的切线斜率为 $e^{x_1+a} + 1$.

对 $y = x^2 + x$ 求导得 $y'_2 = 2x + 1$, 则曲线 $y = x^2 + x$ 在点 (x_2, y_2) 处的切线斜率为 $2x_2 + 1$.

$$\begin{cases} k_1 = e^{x_1+a} + 1 = 2x_2 + 1 (k_1 > 1), \\ \text{因为 } e^{x_1+a} > 0, \text{ 所以 } e^{x_1+a} + 1 > 1, \text{ 即 } k_1 > 1 \\ k_1x_1 + b_1 = e^{x_1+a} + x_1, \\ k_1x_2 + b_1 = x_2^2 + x_2, \end{cases}$$

可得 $\begin{cases} x_1 = \ln(k_1 - 1) - a, \\ x_2 = \frac{k_1 - 1}{2}, \\ (k_1 - 1)(x_2 - x_1) = x_2^2 - e^{x_1+a}, \end{cases}$

$$\text{所以 } (k_1 - 1) \left[\frac{k_1 - 1}{2} \ln(k_1 - 1) + a \right] = \frac{(k_1 - 1)^2}{4} - (k_1 - 1), \text{ 整理得 } a = \ln(k_1 - 1) - \frac{k_1 - 1}{4} - 1 (k_1 > 1).$$

同理, 当直线 $l_2: y = k_2x + b_2$ 与曲线 $y = e^{x+a} + x, y = x^2 + x$ 都相切时, $a = \ln(k_2 - 1) - \frac{k_2 - 1}{4} - 1 (k_2 > 1)$.

故只需 $a = \ln(k-1) - \frac{k-1}{4} - 1 (k > 1)$ 恰有两个不同的解, 即直线 $y = a$ 与曲线 $y = \ln(k-1) - \frac{k-1}{4} - 1 (k > 1)$ 恰有两个交点.

令 $h(t) = \ln t - \frac{t}{4} - 1 (t > 0)$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{4} = \frac{4-t}{4t}$, 所以当 $0 < t < 4$ 时, $h'(t) >$

0, 当 $t > 4$ 时, $h'(t) < 0$,

所以 $h(t)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递增, 在 $(4, +\infty)$ 上单调递减, 则 $h(t)_{\max} =$

$$h(4) = \ln 4 - \frac{4}{4} - 1 = 2\ln 2 - 2,$$

又因为当 $t \rightarrow 0$ 时, $h(t) \rightarrow -\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $h(t) \rightarrow -\infty$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty, 2\ln 2 - 2)$.

归纳总结 (1) 已知公切线条数求参数取值范围的基本步骤: ①分别设切点坐标; ②求出两曲线的切线方程; ③利用两切线方程的斜率和纵截距分别相同, 建立关于切点横坐标的方程组; ④消元得关于某一切点横坐标的方程 (含参数); ⑤分离参数化为 $a = F(x)$ 形式, 曲线有几条公切线, 即直线 $y = a$ 与曲线 $y = F(x)$ 有几个交点, 从而确定参数 a 的取值范围. 特别提醒: 消去变量时, 要注意变量的取值范围.

(2) 经常用到的三个关系: ①切点处的导数是切线的斜率; ②切点在切线上; ③切点在曲线上.

7-2 【解析】 记 $f(x) = \ln x, g(x) = e^x$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = e^x.$$

所以曲线 $y = \ln x$ 在点 $P(x_1, y_1)$ 处的

$$\text{切线方程为 } y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1), \text{ 即 } y = \frac{1}{x_1}x + \ln x_1 - 1.$$

曲线 $y = e^x$ 在点 $Q(x_2, y_2)$ 处的切线方程为 $y - e^{x_2} = e^{x_2}(x - x_2)$, 即 $y = e^{x_2}x + e^{x_2}(1 - x_2)$.

$$\text{由已知得, } \begin{cases} \frac{1}{x_1} = e^{x_2}, \\ \ln x_1 - 1 = e^{x_2}(1 - x_2), \end{cases} \text{ 由}$$

$$\frac{1}{x_1} = e^{x_2} \text{ 得 } x_1 = e^{-x_2}, \text{ 故 } \ln x_1 - 1 = \ln e^{-x_2} - 1 = -x_2 - 1,$$

$$\text{故 } -x_2 - 1 = \frac{1}{x_1}(1 - x_2), \text{ 解得 } x_1 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1},$$

$$\text{所以 } x_1 - 1 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} - 1 = \frac{2}{x_2 + 1}, \text{ 因此 } (x_1 -$$

$$1)(x_2 + 1) = \left(\frac{2}{x_2 + 1} \right)(x_2 + 1) = -2.$$

8. $y = x + 1$ (或 $y = x - 1$) 【解析】 $f'(x) =$

$1 + \cos x$, 其周期为 2π ,

而 $f(x + 2\pi) = x + 2\pi + \sin(x + 2\pi) = x + 2\pi + \sin x = f(x) + 2\pi$,

则 $\frac{f(x + 2\pi) - f(x)}{x + 2\pi - x} = 1$, 所以斜率为 1 的切线满足题意.

$$\text{令 } f'(x) = 1, \text{ 得 } x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{当 } k \text{ 为偶数时, } f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi + 1,$$

$$\text{此时切线方程为 } y - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi + 1\right) = x -$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ 即 } y = x + 1;$$

$$\text{当 } k \text{ 为奇数时, } f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi - 1,$$

$$\text{此时切线方程为 } y - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi - 1\right) = x -$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ 即 } y = x - 1,$$

故 $y = x + 1$ 或 $y = x - 1$ 满足题意.

专题 6 三次函数的图象与性质

刷难关

1. D 【解析】 因为三次函数 $f(x) = 2ax \cdot (x-b)^2$ 的定义域和值域都为 $[a, b]$, 所以 $f(b) = 2ab(b-b)^2 = 0 \in [a, b]$, 且 $a \neq 0$, 所以 $a < 0, b \geq 0$. $f'(x) = 2a(x-b)(3x-b)$,

当 $x \in \left(a, \frac{b}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(\frac{b}{3}, b\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

所以 $f\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{2ab}{3}\left(\frac{b}{3} - b\right)^2 = a$, 解得 $b = \frac{3}{2}$, 所以验证可知函数 $f(x) = 2ax\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ 的定义域和值域均为 $\left[a, \frac{3}{2}\right]$, 满足题意. 故选 D.

2. AB 【解析】 由 $f(x) = x^3 - ax^2 + a - 1 = x^3 - 1 - a(x^2 - 1)$, 令 $x^2 - 1 = 0$, 得 $x = \pm 1$, 则 $f(-1) = -2, f(1) = 0$, 则函数 $f(x)$ 的图象过定点 $(1, 0), (-1, -2)$, **A 正确**. 若函数 $f(x)$ 单调递增, 则 $f'(x) = 3x^2 - 2ax \geq 0$ 恒成立, 则 $\Delta = 4a^2 - 4 \times 3 \times 0 \leq 0$, 得 $a = 0$, **B 正确**.

当 $a < 0$ 时, $f'(x) = 3x\left(x - \frac{2a}{3}\right)$, 当 $x < \frac{2a}{3}$ 或 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $\frac{2a}{3} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{2a}{3}\right)$ 和 $(0, +\infty)$ 上

单调递增, 在 $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ 上单调递减, 所以 0 是函数 $f(x)$ 的极小值点, $\frac{2a}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, **C 错误**.

同理可得当 $a > 0$ 时, 0 是函数 $f(x)$ 的极大

值点, $\frac{2a}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,

此时 $f(x)$ 的极大值为 $f(0) = a - 1$, 极

$$\text{小值为 } f\left(\frac{2a}{3}\right) = -\frac{4}{27}a^3 + a - 1,$$

若 $f(x)$ 的极大值与极小值互为相反数, 则 $f(0) + f\left(\frac{2a}{3}\right) = a - 1 - \frac{4}{27}a^3 + a -$

$$1 = -\frac{4}{27}a^3 + 2a - 2 = 0.$$

$$\text{设 } h(a) = -\frac{4}{27}a^3 + 2a - 2, a > 0, \text{ 则}$$

$$h'(a) = -\frac{4}{9}a^2 + 2 = \frac{18 - 4a^2}{9},$$

当 $0 < a < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $h'(a) > 0$; 当 $a > \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $h'(a) < 0$.

所以 $h(a)$ 在 $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 所以 $h(a)_{\max} = h\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{27} \times \frac{9}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 > 0$, 又因为 $h(0) = -2 < 0$, 所以存在 $a_1 \in \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, 使得 $h(a_1) = 0$, 即方程 $-\frac{4}{27}a^3 + 2a - 2 = 0$ 至少还有一个根在 $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 上, **D 错误**, 故选 AB.

3. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ 【解析】 $f(x) = ax^3 + x^2 + cx + 1$ ($a > 0$) 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 $f'(x) = 3ax^2 + 2x + c$, 当 $\Delta = 4 - 12ac \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 不会有三个零点, 不符合题意, 故 $\Delta = 4 - 12ac > 0$, 解得 $ac < \frac{1}{3}$.

设函数 $f(x)$ 的三个相异的零点分别为 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 故 $2x_2 = x_1 + x_3$, 则 $ax_1^3 + x_1^2 + cx_1 + 1 = 0$ ①, $ax_2^3 + x_2^2 + cx_2 + 1 = 0$ ②, $ax_3^3 + x_3^2 + cx_3 + 1 = 0$ ③.

①-②, 得 $a(x_1^3 - x_2^3) + (x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$, 即 $a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_2) = 0$, 故 $(x_1 - x_2)(ax_1^2 + ax_1x_2 + ax_2^2 + x_1 + x_2 + c) = 0$.

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $ax_1^2 + ax_1x_2 + ax_2^2 + x_1 + x_2 + c = 0$ ④, 同理可得, $ax_2^2 + ax_2x_3 + ax_3^2 + x_2 + x_3 + c = 0$ ⑤.

④-⑤, 得 $a(x_1^2 - x_3^2) + ax_2(x_1 - x_3) + x_1 - x_3 = 0$, 即 $[a(x_1 + x_3) + ax_2 + 1](x_1 - x_3) = 0$,

因为 $x_1 < x_3$, 所以 $a(x_1 + x_3) + ax_2 + 1 = 0$, 又因为 $2x_2 = x_1 + x_3$, 所以 $2ax_2 + ax_2 + 1 = 0$, 解得 $x_2 = -\frac{1}{3a}$, 将其代入 ② 中, 得

$$\frac{1}{27a^2} + \frac{1}{9a^2} - \frac{c}{3a} + 1 = 0, \text{ 即 } c = \frac{2}{9a} + 3a.$$

又 $ac < \frac{1}{3}$, 故 $\frac{2}{9} + 3a^2 < \frac{1}{3}$, 得 $-\frac{\sqrt{3}}{9} < a < \frac{\sqrt{3}}{9}$, 又 $a > 0$, 所以 $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{9}$.

多种解法 设函数 $f(x)$ 的三个相异的零点分别为 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$),

$$\text{则有 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{a} & \text{①,} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} & \text{②,} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{1}{a} & \text{③,} \end{cases}$$

因为 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 所以 $x_1 + x_3 = 2x_2$, 代入 ① 中得 $x_2 = -\frac{1}{3a}$,

故 $\begin{cases} x_1 + x_3 = -\frac{2}{3a}, \text{ 而 } (x_1 + x_3)^2 > 4x_1x_3, \\ x_1x_3 = 3, \end{cases}$ 即 $\frac{4}{9a^2} > 12$, 得 $a^2 < \frac{1}{27}$, 又 $a > 0$, 所以 $0 <$

$a < \frac{\sqrt{3}}{9}$, 即 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

二级结论 一元三次方程根与系数的关系

设实系数一元三次方程 $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ ($a_3 \neq 0$) ①

在复数集 $\mathbf{C}$ 内的根为 x_1, x_2, x_3 , 可以得到, 方程 ① 可变形为

$$a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0,$$

$$\text{展开得 } a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3 = 0. \text{ ②}$$

比较 ① ② 可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

4. 【解】 (1) 函数 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$, 求导可得 $f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a$,

因为 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处取得极值, 所以

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6(a+1) \times \frac{1}{3} + 6a = 0,$$

$$\text{化简可得 } \frac{2}{3} - 2a - 2 + 6a = 0, \text{ 解得}$$

$$a = \frac{1}{3}.$$

此时 $f'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x-1)(x-1)$,

令 $f'(x) > 0$ 得 $x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$; 令 $f'(x) <$

$$0 \text{ 得 } \frac{1}{3} < x < 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ 和 $(1, +\infty)$ 上

单调递增, 在 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 上单调递减,

所以 $x = \frac{1}{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 满足题意.

$$\text{故 } a = \frac{1}{3}.$$

$$(2) f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 6[x^2 - (a+1)x + a] = 6(x-1)(x-a),$$

分类讨论, 当 $a > 1$ 时,

当 $x < 1$ 或 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $1 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = 6(x-1)^2 \geq 0$, $f(x)$

在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a < 1$ 时,

当 $x < a$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $a < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上所述: 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, a)$ 上单调递减;

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$, $(1, +\infty)$

上单调递增, 在 $(a, 1)$ 上单调递减.

(3) 因为 $a > 1$, 由 (2) 可知当 $x < 1$ 或 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $1 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取到极大值 $f(1) = 2 - 3(a+1) + 6a = 3a - 1$,

当 $x = a$ 时, $f(x)$ 取到极小值 $f(a) = 2a^3 - 3(a+1)a^2 + 6a^2 = -a^3 + 3a^2$,

且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有三个零点, 所以

$$\begin{cases} f(1) > 0, \text{ 即 } 3a - 1 > 0, \\ f(a) < 0, \text{ 即 } -a^3 + 3a^2 < 0, \end{cases}$$

悟: 三次函数有三个零点的充要条件是极大值大于 0, 极小值小于 0

解得 $a > 3$, 即实数 a 的取值范围是 $(3, +\infty)$.

5. ACD 【解析】 A: 令 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x - 9) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 $x^2 - 3x - 9 = 0$,

因为方程 $x^2 - 3x - 9 = 0$ 的判别式 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 45 > 0$,

所以方程 $x^2 - 3x - 9 = 0$ 有两个不相等的实数根, 显然 $x = 0$ 不是该一元二次方程的实数根,

因此 $f(x)$ 有 3 个零点, 故 **A 正确**.

B: 因为 $f(1+x) + f(1-x) = (1+x)^3 - 3(1+x)^2 - 9(1+x) + (1-x)^3 - 3(1-x)^2 - 9(1-x) = -22$,

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, -11)$ 对称, 故 **B 不正确**.

C: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 3$ 或 $x < -1$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(3, +\infty)$, $(-\infty, -1)$ 上单调递增;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $-1 < x < 3$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 上单调递减,

所以 -1 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 3 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 故 **C 正确**.

D: 设切线与函数 $f(x)$ 的图象相切于点 $(x_0, x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0)$,

所以过该切点的切线斜率为 $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 - 9$,

切线方程为 $y - (x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0) = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(x - x_0)$, 把 $(-2, 0)$ 代入, 得

$$0 - (x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0) = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(-2 - x_0), \text{ 化简得 } 2x_0^3 + 3x_0^2 - 12x_0 - 18 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0^2(2x_0 + 3) - 6(2x_0 + 3) = 0 \Rightarrow (2x_0 + 3)(x_0^2 - 6) = 0,$$

$$\text{解得 } x_0 = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x_0 = \pm\sqrt{6}, \text{ 所以经过点}$$

$(-2, 0)$ 且与 $f(x)$ 的图象相切的直线有 3 条, 故 **D 正确**. 故选 ACD.

6. AD 【解析】 对于 A: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^3 - x + 1$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 0$, 又 $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在拐点处的切线方程为 $y = -x + 1$, 即 $x + y - 1 = 0$, 故 **A 正确**.

对于 B: 当 $a = 3$ 时, $f(x) = x^3 - 3x + 1$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 3$, 所以当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-1$. 又 $f(-2)=-1$, 要使函数 $y=f(x)$ 在区间 $(m, m+5)$ 内存在最小值, 则 $\begin{cases} -2 \leq m < 1, \\ m+5 > 1, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq m < 1$, 即 m 的取值范围是 $[-2, 1)$, 故 **B 错误**.

对于 C: $f(x) = x^3 - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$, 则 $f'(x) = 3x^2 - a$, 设切点为 $(t, t^3 - at + 1)$, 则 $f'(t) = 3t^2 - a$, 所以切线方程为 $y - (t^3 - at + 1) = (3t^2 - a)(x - t)$, 又切线过点 $(1, 2)$, 所以 $2 - (t^3 - at + 1) = (3t^2 - a)(1 - t)$, 整理得 $a = -2t^3 + 3t^2 - 1$.

令 $m(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$, 则 $m'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$, 所以当 $0 < t < 1$ 时, $m'(t) > 0$, 当 $t < 0$ 或 $t > 1$ 时, $m'(t) < 0$, 所以 $m(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0), (1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $m(t)$ 在 $t=0$ 处取得极小值, 在 $t=1$ 处取得极大值, 且 $m(0) = -1, m(1) = 0$.

因为经过点 $(1, 2)$ 可以向曲线 $y=f(x)$ 作三条切线, 即直线 $y=a$ 与 $m(t)$ 的图象有三个交点, 所以 $-1 < a < 0$, 即 a 的取值范围是 $(-1, 0)$, 故 **C 错误**.

对于 D: 由 $\begin{cases} y = -a \cdot (x - x_0) + f(x_0), \\ y = x^3 - ax + 1, \end{cases}$ 可得 $x^3 - ax + 1 = -a(x - x_0) + x_0^3 - ax_0 + 1$, 即 $x^3 = x_0^3$, 显然 $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $x = x_0$, 即对任意实数 x_0 , 直线 $y = -a(x - x_0) + f(x_0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点, 故 **D 正确**. 故选 AD.

多种解法 对于 C: $f'(x) = 3x^2 - a$, $f''(x) = 6x$, 令 $f''(x) = 0$, 得 $x = 0$, 即三次函数图象的对称中心为 $N(0, 1)$. 又 $f'(0) = -a$, 则三次函数图象在点 N 处的切线 l 的方程为 $y = -ax + 1$, 记 $g(x) = -ax + 1$. 若过点 $(1, 2)$ 可以作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线, 则 $g(1) < 2 < f(1)$, 即 $-a + 1 < 2 < -a$, 解得 $-1 < a < 0$. 故 C 错误.

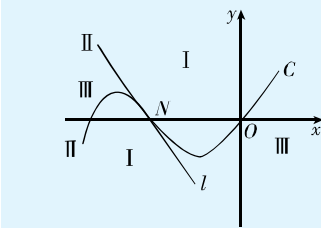
二级结论 过平面内一点作三次函数图象的切线的条数

三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$, 设三次函数图象 C 在其对称中心 N 处的切线为 l , M 是三次函数图象 C 所在平面上的一点, 则

(I) 过点 M 能且仅能作 C 的一条切线, 当且仅当点 M 位于 C 和 l 所夹的上、下两个区域内 (边界除外), 或点 M 与点 N 重合;

(II) 过点 M 能且仅能作 C 的两条切线, 当且仅当点 M 位于图象 C 或切线 l 上 (点 N 除外);

(III) 过点 M 能且仅能作 C 的三条切线, 当且仅当点 M 位于 C 和 l 所夹的左、右两个区域内 (边界除外).



7. $-\frac{1013}{2}$ 【解析】 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$, 则

$$f'(x) = 3x^2 - 3x, f''(x) = 6x - 3.$$

$$\text{令 } f''(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2}, \text{ 且 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

则由题意可知, $f(x)$ 图象的拐点为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 故 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 所以 $f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2}$.

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{2^{025}}\right) + f\left(\frac{2}{2^{025}}\right) + f\left(\frac{3}{2^{025}}\right) + \cdots + f\left(\frac{2^{024}}{2^{025}}\right) + f\left(\frac{2^{025}}{2^{025}}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{2^{024}}{2} + f(1) = -506 - \frac{1}{2} = -\frac{1013}{2}.$$

专题7 含参函数单调性的分类讨论

刷难关

1. 【解】(1) $\because f'(x) = x - (a+1) + \frac{a}{x}$, $\therefore f'(2) = 2 - (a+1) + \frac{a}{2} = 1 - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, 解得 $a=1$. 又 $f(2) = 2 - 2(a+1) + a \ln 2 = \ln 2 - 2$, $\therefore 1 + \ln 2 + b = \ln 2 - 2$, 解得 $b = -3$. $\therefore a=1, b=-3$.

(2) 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = x - (a+1) + \frac{a}{x} = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x} = \frac{(x-a)(x-1)}{x}$.

① 当 $a \leq 0$ 时, 若 $x \in (0, 1)$, 则 $f'(x) < 0$; 若 $x \in (1, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

② 当 $a > 0$ 时, (i) 若 $0 < a < 1$, 则当 $x \in (0, a) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (a, 1)$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, 1)$.

(ii) 若 $a=1$, 则 $f'(x) \geq 0 (f'(x)$ 不恒等于 0) 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

(iii) 若 $a > 1$, 则当 $x \in (0, 1) \cup (a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, a)$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, a)$.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$; 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, 1)$; 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间; 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, a)$.

规律方法 对于利用导数讨论含参函数的单调性问题, 常见的分类讨论点有以下三个:

(1) 求导后, 考虑 $f'(x) = 0$ 是否有实根, 从而引起分类讨论;

(2) 求导后, $f'(x) = 0$ 有实根, 但不清楚 $f'(x) = 0$ 的实根是否落在定义域内, 从而引起分类讨论;

(3) 求导后, $f'(x) = 0$ 有实根, 且根落在定义域内, 但不清楚这些根的大小关系, 从而引起分类讨论.

在求解导数中含参数的函数单调性问题时, 可根据题意选择恰当的分类讨论方法. 在具体问题中, 可能要讨论其中的两点或三点, 这时的讨论就会复杂一些, 有些题目也可以根据式子和题目的特点进行灵活处理, 减少分类讨论.

2. 【解】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^{2x} - 2x$, 所以 $f'(x) = 2e^{2x} - 2$, 由 $f'(x) = 2e^{2x} - 2 = 0$, 得 $x=0$,

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值 $f(0)=1$	单调递增

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1$, 无极大值.

(2) 因为函数 $f(x) = ae^{2x} + 2(1-a)e^x - 2x$, 所以 $f'(x) = 2ae^{2x} + 2(1-a)e^x - 2 = 2(ae^x + 1)(e^x - 1)$.

点悟: 复杂的导数不要怕, 先尝试能否因式分解, 如果可以因式分解, 就把一个复杂代数式的正负判断问题转化成了多个简单代数式的正负判断问题.

(i) 当 $a \geq 0$ 时, 若 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) = 0$, 则 $x=0$, 若 $x < 0$, 则 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) < 0$, 若 $x > 0$, 则 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) > 0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(ii) 当 $-1 < a < 0$ 时, 由 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) = 0$, 得 $x=0$ 或 $x =$

$$\ln\left(-\frac{1}{a}\right) > 0,$$

悟: 因为 $-1 < a < 0$, 所以 $-\frac{1}{a} > 1$.

$$\text{所以 } \ln\left(-\frac{1}{a}\right) > 0$$

若 $x < 0$ 或 $x > \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$, 则 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) < 0$,

若 $0 < x < \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$, 则 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln\left(-\frac{1}{a}\right), +\infty)$ 上单调递减, 在区间 $(0, \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$ 上单调递增.

(iii) 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = -2(e^x - 1)^2 \leq 0$, 且不恒为 0, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减.

(iv) 当 $a < -1$ 时, 由 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \ln\left(-\frac{1}{a}\right) < 0$,

若 $x < \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$ 或 $x > 0$, 则 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) < 0$,

若 $\ln\left(-\frac{1}{a}\right) < x < 0$, 则 $f'(x) = 2(ae^x + 1)(e^x - 1) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln\left(-\frac{1}{a}\right), 0)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln\left(-\frac{1}{a}\right), +\infty)$ 上单调递减, 在区间 $(0, \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$ 上单调递增;

当 $a = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln\left(-\frac{1}{a}\right), 0)$ 上单调递增.

3. (1) 【证明】 $f(x) = \ln(x+m)$ 在定义域内是增函数, $\therefore$ 当 $m \leq 1$ 时, $f(x) = \ln(x+m) \leq \ln(x+1)$,

要证 $f(x) < e^x$, 只需证 $\ln(x+1) < e^x$.

设 $F(x) = e^x - \ln(x+1)$ ($x > -1$), 则

$$F'(x) = e^x - \frac{1}{x+1},$$

$\therefore F'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F'(0) = 0$, $\therefore$ 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$, $\therefore F(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore F(x) \geq F(0) = e^0 - \ln 1 = 1 > 0$, 即 $e^x > \ln(x+1)$, 故当 $m \leq 1$ 时 $f(x) < e^x$.

(2) 【解】当 $m = 0$ 时, $f(x) = \ln x$,

$f'(x) = \frac{1}{x}$, 则 $g(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}.$$

① 当 $a \leq 2$ 时, $x^2 - ax + 1 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$

悟: $a \leq 2$ 时, $x^2 - ax + 1 \geq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

上恒成立 (当且仅当 $a = 2, x = 1$ 时取等号), $\therefore g'(x) \leq 0$ 且等号不恒成立, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

② 当 $a > 2$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 则方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 有两个不相等的正实根

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2},$$

当 $x \in \left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$, $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 上单调递增.

4. 【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且

$$f'(x) = \frac{2ax - ax^2 - 1}{e^x} = -\frac{ax^2 - 2ax + 1}{e^x} \quad (a > 0).$$

令 $g(x) = ax^2 - 2ax + 1$, $\Delta = 4a^2 - 4a = 4a(a-1)$.

当 $a > 1$ 时, $\Delta > 0$, 由 $ax^2 - 2ax + 1 = 0$, 得

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - a}}{a} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a}},$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}} < x < 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$,

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}},$$

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$ 或 $x > 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$,

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}},$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\infty, 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right)$ 和 $\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, +\infty\right)$ 上单调递减;

当 $a = 1$ 时, $g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, 则 $f'(x) \leq 0$, 其中等号不恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $0 < a < 1$ 时, $\Delta = 4a(a-1) < 0$, 则 $g(x) > 0$, 故 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

综上, 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\infty, 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right)$ 和 $\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, +\infty\right)$ 上单调递减;

当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(2) 由 (1) 知, 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个极值点, 且满足 $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = \frac{1}{a}$, 不妨设 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_1)f(x_2) = \frac{ax_1^2 + 1}{e^{x_1}} \times \frac{ax_2^2 + 1}{e^{x_2}} = \frac{a^2 x_1^2 x_2^2 + a(x_1^2 + x_2^2) + 1}{e^{x_1 + x_2}} = \frac{2 + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)}{e^2},$

因为 $x_1 \neq x_2$, 且 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 所以 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 2$,

悟: 由 $x_1 + x_2 = 2 > 0$, $x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0$, 可知 x_1, x_2 同为正数

所以 $f(x_1)f(x_2) > \frac{4}{e^2}$,

所以 $f(x_1)f(x_2)$ 的取值范围为 $\left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$.

专题 8 利用导数证明不等式

刷难关

1. (1) 【解】函数 $f(x) = \frac{ax^2 + b}{e^x}$ 求导得

$$f'(x) = \frac{2axe^x - (ax^2 + b)e^x}{e^{2x}} = \frac{2ax - ax^2 - b}{e^x},$$

已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + b}{e^x}$ 在 $x = 3$ 处取得

极大值 $\frac{6}{e^3}$,

$$\therefore \begin{cases} f(3) = \frac{9a+b}{e^3} = \frac{6}{e^3}, \\ f'(3) = \frac{-3a-b}{e^3} = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=-3. \end{cases}$$

悟: 因为 $f'(3) = 0$ 只能说明 3 是 $f(x)$ 的极值点, 所以求得参数后, 需反代回验证 3 是否为 $f(x)$ 的极大值点

此时 $f'(x) = \frac{2x - x^2 + 3}{e^x}$, 令 $f'(x) =$

$$\frac{2x - x^2 + 3}{e^x} = 0, \text{解得 } x = -1 \text{ 或 } x = 3.$$

当 $-1 < x < 3$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x < -1$ 或 $x > 3$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

$\therefore f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极大值, 极大值

为 $\frac{6}{e^3}$, 符合题意, $\therefore a = 1, b = -3$.

(2)【证明】由(1)知 $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$, 则需证明当 $x > 3$ 时, $\frac{x^2-3}{e^x} < x-1$, 即 $(x-1)e^x > x^2-3$.

令 $g(x) = (x-1)e^x - x^2 + 3$,
求导得 $g'(x) = xe^x - 2x = x(e^x - 2)$,
当 $x > 3$ 时, $e^x - 2 > 0, x > 0$, 则 $g'(x) > 0$,
故 $g(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore$ 当 $x > 3$ 时, $g(x) > g(3) = 2e^3 - 6 > 0$,
 $\therefore (x-1)e^x - x^2 + 3 > 0$, 即 $\frac{x^2-3}{e^x} < x-1$,
 $\therefore f(x) < x-1$, 得证.

2. (1)【解】由函数 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x$, 可得其定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{ax-2}{x^2}$.

①当 $a < 0$ 时, 由 $x > 0$, 得 $ax-2 < 0$ 恒成立, $x^2 > 0$ 恒成立, 所以 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{2}{a}$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{2}{a}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

(2)【证明】当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x (x > 0)$, 要证 $2 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 - x > \frac{1}{2}$,

即证 $\ln x + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x} > 0$.

令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x} (x > 0)$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{2x^2}$,

令 $g'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1 > 0$,

故当 $a = 1$ 时, $xf(x) + \frac{1}{2}x^2 - x > \frac{1}{2}$.

名师点拨 证明函数不等式的基本思路是构造差函数求最值和 0 比较, 但实际做题时, 有些差函数求导形式不佳, 不好研究, 要考虑适当地对差函数变形后再研究.

规律方法 考虑到对数函数 $y = \ln x$

的导函数 $y' = \frac{1}{x}$ 不含对数, 形式简单, 但如果对数函数和其他函数相乘, 求导后依然含有对数函数, 导函数就不好研究, 所以在构造函数时, 尽量让对数“单身”, 不要和其他函数相乘.

3. (1)【解】根据题意, $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}, x > 0$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{a}$; 由

$f'(x) < 0$ 得 $x > \frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增; 在

$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递

增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2)【解】由题可知 $f(x+1) > x - ae^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

又 $f(e^x) = x - ae^x$, 所以 $f(x+1) > f(e^x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $g(x) = e^x - x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x > x + 1 > 1$,

要使 $f(x+1) > f(e^x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 只需 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减即可,

由(1)得 $\begin{cases} a > 0, \\ \frac{1}{a} \leq 1, \end{cases}$ 解得 $a \geq 1$.

故实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(3)【证明】 $f(x+a) < e^x - ax - a^2$, 即 $\ln(x+a) < e^x$.

当 $a \leq 2$ 时, $\ln(x+a) \leq \ln(x+2)$, 故只需证 $\ln(x+2) < e^x$ 即可.

由(2)易得 $e^x \geq x+1$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号,

令 $h(x) = x + 1 - \ln(x+2)$, 则 $h'(x) = \frac{x+1}{x+2}$,

当 $x \in (-2, -1)$ 时, $h'(x) = \frac{x+1}{x+2} < 0$; 当

$x \in (-1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

则 $h(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(x)$ 在 $x=-1$ 处取得最小值 $h(-1) = 0$, 因此

$h(x) \geq 0$, 即 $x+1 \geq \ln(x+2)$, 当且仅当 $x=-1$ 时取等号.

综上, $e^x \geq x+1 \geq \ln(x+2)$, 两处取等条件不同时成立,

所以 $\ln(x+2) < e^x$, 即 $f(x+a) < e^x - ax - a^2$ 成立.

多种解法 (2) 设 $g(x) = f(x+1) -$

$x + ae^x = \ln(x+1) - a(x+1) - x + ae^x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+1} - a - 1 + ae^x$.

设 $h(x) = g'(x) = \frac{1}{x+1} - a - 1 + ae^x$, 则

$h'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + ae^x$,

①当 $a \geq 1$ 时, $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > g'(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 符合题意.

②当 $a < 1$ 时, 由 $h'(0) = a - 1 < 0$, 可知 $\exists x_0 > 0$, 使得 $x \in (0, x_0)$, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $x \in (0, x_0)$ 上单调递减, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < g'(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x) < g(0) = 0$, 不符合题意.

综上, 实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

规律方法 (1) 放缩: 证明一些复杂的函数不等式时(包含指、对、幂、三角等多种函数类型), 直接构造差函数求导研究非常困难, 可以考虑将其中的复杂的指、对、三角放缩成较简单的幂形式, 再进行研究.

(2) 放缩不等式

①需要积累一些常见的放缩不等式: $e^x \geq x+1, \ln x \leq x-1 (x > 0)$, 以及由上述不等式变形得到的 $e^x \geq ex, e^x \leq \frac{1}{1-x} (x < 1), \ln x \leq \frac{x}{e} (x > 0), \ln x \geq 1 - \frac{1}{x} (x > 0)$.

②如果简单的放缩不等式不足以解题, 考虑看看题目的背景和前面的问题, 本题的背景是切线放缩(实际上 $e^x \geq x+1, \ln x \leq x-1 (x > 0)$ 这两个不等式也源自切线放缩), 所以可以构造切线不等式解题, 注意到 $x=0$ 时不等式 $e^x \geq x+1$ 等号成立, 可以猜测利用曲线 $y = e^x$ 在 $x=0$ 处的切线进行过渡, 即为本题的解题思路.

4. (1)【解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = ae^x \ln x + \frac{a}{x} e^x - \frac{b}{x^2} e^{x-1} +$

$\frac{b}{x} e^{x-1}$. 由题意可得 $f(1) = b = 2$,

$f'(1) = ae = e$. 故 $a = 1, b = 2$.

(2)【证明】由(1)知, $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x} \cdot e^{x-1}$, 从而 $f(x) > 1$ 等价于 $x \ln x >$

$xe^{-x} - \frac{2}{e}, x > 0$.

点悟 复杂的指数形式如果放在一起研究太过麻烦, 可以考虑分离成两个相对简单的函数, 即 $g(x) > h(x)$, 并使得 $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$, 或 $g(x)_{\min} \geq h(x)_{\max}$ 且等号不在同一点处取得, 即可证明原不等式. 设函数 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 +$

$\ln x$, 所以当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在

$(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $g(x) \geq$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

设函数 $h(x) = xe^{-x} - \frac{2}{e}$, 则 $h'(x) =$

$$e^{-x} \cdot (1-x),$$

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递

减, 从而 $h(x) \leq h(1) = -\frac{1}{e}$.

综上, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > h(x)$ (最值不在同一点处取得, 因此取不到等号), 即 $f(x) > 1$.

名师点拨 显然第(2)问中“ $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$ (或 $g(x)_{\min} \geq h(x)_{\max}$ 且等号不在同一点处取得)”是“ $f(x) > 1$ ”的充分不必要条件, 此法也算是某种意义上的放缩. 这个方法中, 如何构造合适的 $g(x)$, $h(x)$ 是难点.

考虑到 $g(x)$ 有最小值, $h(x)$ 有最大值, 而含指、对的函数一般不在定义域上单调, 结合经验, 可以考虑构造 $g(x)$ 下凸, 有最小值, $h(x)$ 上凸, 有最大值, 并且 $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$ (或 $g(x)_{\min} \geq h(x)_{\max}$ 且等号不在同一点处取得).

常见的下凸且有最小值的函数有 $y = xe^x$, $y = x \ln x (x > 0)$, $y = \frac{e^x}{x} (x > 0)$, $y =$

$$\frac{x}{\ln x} (x > 1).$$

常见的上凸且有最大值的函数有 $y = \frac{x}{e^x}$, $y = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 与上述函数形式类似的函数也可以具有类似的性质.

5. 思路导引 (1) 把 $a=1$ 代入, 求出函数 $f(x)$ 的导数, 再利用导数的几何意义求出切线方程.

(2) 由不等式的性质可得 $2 \ln x - ax \leq 2 \ln x - x$, 再构造函数并利用导数证明不等式 $x-2 \geq 2 \ln x - x$ 成立即可.

(3) 先利用同构思想变形不等式, 再利用函数单调性得 $\ln x^2 \leq ax$, 然后分离参数并构造函数, 利用导数求出函数最大值即可求得参数范围.

(1)【解】若 $a=1$, 则 $f(x) = 2 \ln x - x$, $f(1) = -1$,

求得 $f'(x) = \frac{2}{x} - 1$, 则 $f'(1) = 2 - 1 = 1$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y - (-1) = 1 \cdot (x - 1)$, 即 $x - y - 2 = 0$.

(2)【证明】函数 $f(x) = 2 \ln x - ax$ 的定

义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a \geq 1, x > 0$ 时, $ax \geq x$, 则 $2 \ln x - ax \leq 2 \ln x - x$ 对任意 $x > 0$ 恒成立,

令 $\varphi(x) = x - 2 - (2 \ln x - x) = 2x - 2 \ln x - 2$, 求得 $\varphi'(x) = 2 - \frac{2}{x}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$, 因此 $x - 2 \geq 2 \ln x - x \geq 2 \ln x - ax$, 所以 $2 \ln x - ax \leq x - 2$.

(3)【解】不等式 $f(x) \leq e^{ax} - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \ln x \leq e^{ax} + ax \Leftrightarrow e^{\ln x^2} + \ln x^2 \leq e^{ax} + ax$,

悟: 将不等式两边进行同构, 从而构造函数, 利用函数单调性进行求解.

令 $g(x) = e^x + x$, 由函数 $y = e^x, y = x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 可知函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

不等式 $e^{\ln x^2} + \ln x^2 \leq e^{ax} + ax \Leftrightarrow g(\ln x^2) \leq g(ax)$, 则 $\ln x^2 \leq ax$, 即 $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{a}{2}$.

令 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求得 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$,

因此函数 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 则 $h(x)_{\max} =$

$$h(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e},$$

则 $\frac{a}{2} \geq \frac{1}{e}$, 即 $a \geq \frac{2}{e}$, 所以实数 a 的取值范围为 $[\frac{2}{e}, +\infty)$.

6. (1)【解】 由题意知, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = e^{2x} - x$, 则 $f'(x) = 2e^{2x} - 1$,

当 $x=0$ 时, $f(0) = 1, f'(0) = 1$, 所以切线方程为 $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$, 即 $y = x + 1$.

(2)【解】由题意得 $f'(x) = 2e^{2x} - 2a$, $e^{2x} > 0$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = 2e^{2x} - 2a > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 2e^{2x} - 2a = 0$, 则 $e^{2x} = a$, 解得 $x = \frac{\ln a}{2}$,

当 $x < \frac{\ln a}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在

$(-\infty, \frac{\ln a}{2})$ 上单调递减;

当 $x > \frac{\ln a}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在

$(\frac{\ln a}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{\ln a}{2})$ 上单调

递减, 在 $(\frac{\ln a}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

(3)【证明】由(2)可知, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{\ln a}{2}$ 处取极小值, 也是最小值,

$$\text{即 } f(x)_{\min} = f\left(\frac{\ln a}{2}\right) = e^{\frac{2 \ln a}{2}} - 2a \times \frac{\ln a}{2} = a - a \ln a,$$

$$\text{要证 } f(x) \geq \ln a - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{2},$$

$$\text{即证 } a - a \ln a \geq \ln a - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{2},$$

$$\text{化简得 } a^2 - 2a \ln a - 2 \ln a + 2a - 3 \geq 0,$$

$$\text{令 } g(a) = a^2 - 2a \ln a - 2 \ln a + 2a - 3,$$

$$\text{则 } g'(a) = 2a - 2 \ln a - 2a \times \frac{1}{a} - 2 \times \frac{1}{a} +$$

$$2 = 2a - 2 \ln a - \frac{2}{a}.$$

$$\text{再令 } h(a) = 2a - 2 \ln a - \frac{2}{a}, \text{ 则 } h'(a) =$$

$$2 - \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2} = \frac{2(a^2 - a + 1)}{a^2},$$

$$\text{因为 } a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ 所以}$$

$h'(a) > 0$, 则 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $h(1) = 2 \times 1 - 2 \ln 1 - 2 = 0$, 所以, 当 $0 < a < 1$ 时, $h(a) < 0$, 即 $g'(a) < 0$,

$g(a)$ 单调递减;

当 $a > 1$ 时, $h(a) > 0$, 即 $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增,

所以 $g(a)$ 在 $a=1$ 处取极小值, 也是最小值, 为 $g(a)_{\min} = g(1) = 1^2 - 2 \times 1 \times \ln 1 - 2 \ln 1 + 2 \times 1 - 3 = 0$,

则 $g(a) \geq g(1) = 0$, 所以 $a^2 - 2a \ln a - 2 \ln a + 2a - 3 \geq 0$,

$$\text{即 } f(x) \geq \ln a - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{2} \text{ 得证.}$$

7. (1)【解】 当 $a=-1$ 时, $f(x) = e^x + 3x + 2 \sin x$, 则 $f(0) = 1, f'(x) = e^x + 3 + 2 \cos x$, 则 $f'(0) = 6$,

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = 6x$, 即 $6x - y + 1 = 0$.

(2)【证明】因为 $\cos x \leq 1$, 所以要证 $f(x) \geq \cos x$, 只需证 $f(x) = a^2 e^x - 3ax + 2 \sin x \geq 1$.

悟: 本题如果不对右侧 $\cos x$ 进行放缩, 后续研究非常困难, 在失败过后可以考虑猜测出题人将 $\cos x$ 单独放在右侧的用意, 大胆放缩尝试证明.

令 $g(a) = e^x a^2 - 3ax + 2 \sin x - 1$, 该二次函数的图象的对称轴为直线 $a = \frac{3x}{2e^x}$,

$$\text{令 } h(x) = \frac{3x}{2e^x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-x}{e^x}, \text{ 令}$$

$h'(x) > 0$, 得 $x < 1$, 令 $h'(x) < 0$, 得 $x > 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = h(1) = \frac{3}{2e} < 1,$$

悟: 对称轴所在直线 $a = \frac{3x}{2e^x}$ 恒在直线 $a=1$ 的左侧.

所以 $g(a)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

问题可转化为证明 $g(1) \geq 0$, 即证 $e^x - 3x + 2\sin x - 1 \geq 0$, 即证 $\frac{3x - 2\sin x + 1}{e^x} \leq 1$.

令 $F(x) = \frac{3x - 2\sin x + 1}{e^x}$, 则 $F'(x) = \frac{2 - 3x + 2\sin x - 2\cos x}{e^x}$,

令 $\varphi(x) = 2 - 3x + 2\sin x - 2\cos x$,

则 $\varphi'(x) = 2\cos x + 2\sin x - 3 = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3 < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递

减, 且 $\varphi(0) = 0$,

所以当 $x < 0$ 时, $F'(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时, $F'(x) < 0$,

所以函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递

增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $F(x) \leq F(0) = 1$, 即 $\frac{3x - 2\sin x + 1}{e^x} \leq 1$, 证毕.

规律方法 考虑到指数函数 $y = e^x$ 的导函数 $y' = e^x$ 依然是指数函数, 导函数的形式较为复杂, 不利于研究导函数的正负, 注意到 $(e^x f(x))' = e^x [f(x) + f'(x)]$, $\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$, 虽然导函数中依然含 e^x , 但是其正负与 e^x 无关, 判断正负相对简单一些, 所以构造函数时经常会将指数形式与剩下的部分凑一个积或者商的形式.

8. (1) 【证明】当 $a = -1$ 时, $f(x) = e^x - 2x - e^{-x} (x \geq 0)$,

$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$, 当且仅当 $e^x = e^{-x}$, 即 $x = 0$ 时取等号, 故 $f'(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 且

$f'(x)$ 不恒为 0, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) \geq f(0) = e^0 - 2 \times 0 - e^0 = 0$, 故 $f(x) \geq 0$.

(2) 【解】当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x - 2x (x \geq 0)$, 则方程 $f(x) = x$ 可化为方程 $e^x - 2x = x$, 即 $e^x - 3x = 0$.

令 $g(x) = e^x - 3x (x \geq 0)$, 则 $g'(x) = e^x - 3$, 令 $g'(x) = e^x - 3 = 0$, 解得 $x = \ln 3$.

当 $x \in [0, \ln 3)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\ln 3, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\ln 3) = e^{\ln 3} - 3\ln 3 = 3 - 3\ln 3 < 0$,

又 $g(0) = e^0 - 3 \times 0 = 1$, $g(2) = e^2 - 3 \times 2 = e^2 - 6 > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0, \ln 3)$ 和 $(\ln 3, +\infty)$ 上各有一个根, 即方程 $f(x) = x$ 有 2 个解.

(3) 【证明】令 $h(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} (t \geq 1)$,

则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{\sqrt{t} - (t-1)}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{t} - \frac{2t - (t-1)}{2t\sqrt{t}} = \frac{2t - (t-1)}{2t\sqrt{t}} = \frac{t+1}{2t\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t} - t - 1}{2t\sqrt{t}} = \frac{-(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}$,

因为 $t \geq 1$, 所以 $h'(t) \leq 0$ 且 $h'(t)$ 不恒为 0, 所以 $h(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(t) \leq h(1) = \ln 1 - \frac{1-1}{\sqrt{1}} = 0$,

即 $\ln t \leq \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, 当且仅当 $t = 1$ 时等号

成立.

令 $t = \frac{k+1}{k} (k > 0)$, 则 $t > 1$, 所以 $\ln \frac{k+1}{k} <$

$\frac{\frac{k+1}{k} - 1}{\sqrt{\frac{k+1}{k}}} = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{k+1}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$.

即 $\frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$,

则 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} > \ln(1+1) - \ln 1$, $\frac{1}{\sqrt{2^2+2}} >$

$\ln(2+1) - \ln 2$, $\dots$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1) -$

$\ln n$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} >$

$[\ln(1+1) - \ln 1] + [\ln(2+1) - \ln 2] + \dots + [\ln(n+1) - \ln n] = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$,

故 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} >$

$\ln(n+1)$.

名师点拨 证明求和不等式的基本思路就是将左、右两边都化作和的形式, 然后比较对应项的大小即可. 本题不等式右侧 $\ln(n+1)$ 可以看作是数列 $\left\{\ln \frac{n+1}{n}\right\}$ 求和, 所以研究 $\ln \frac{n+1}{n}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 的大小关系即可, 研究的时候要充分利用前面已经证明的不等式.

专题 9 构造法在导数中的应用

刷难关

1. D 【解析】令 $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$, 则 $F'(x) = f'(x) - g'(x)$,

因为当 $x \in (a, b)$ 时, 有 $f'(x) > g'(x)$, 所以 $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 所以 $F(a) < F(x) < F(b)$,

即 $\begin{cases} f(x) - g(x) < f(b) - g(b), \\ f(a) - g(a) < f(x) - g(x), \end{cases}$

所以 $f(x) + g(b) < g(x) + f(b)$, $f(x) + g(a) > g(x) + f(a)$, 故 D 正确, C 错误; 由于不知道 $F(a)$, $F(b)$ 的正负, 故无法确定选项 A, B 的正误. 故选 D.

2. B 【解析】构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则

$F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

因为 $f'(x) > f(x)$, 所以 $f'(x) - f(x) > 0$, 所以 $F'(x) > 0$, 因此 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以对于任意的正数 a , 有 $F(0) < F(a)$, 即 $\frac{f(0)}{e^0} < \frac{f(a)}{e^a}$, 即 $f(0) < \frac{f(a)}{e^a}$,

又因为 $e^a > 0$, 所以 $f(a) > e^a f(0)$, 故 A 错误, B 正确. C, D 选项中, $f(a)$ 与

$\frac{f(0)}{e^a}$ 的大小无法判断, 故 C, D 错误.

故选 B.

规律方法 常见的构造函数模型

序号	模型	函数
1	$f'(x) \pm g'(x) > 0$	$h(x) = f(x) \pm g(x)$
2	$\begin{cases} f'(x)g(x) + \\ f(x)g'(x) > 0 \end{cases}$	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$
3	$\begin{cases} f'(x)g(x) - \\ f(x)g'(x) > 0 \end{cases}$	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
4	$xf'(x) + f(x) > 0$	$g(x) = xf(x)$
5	$xf'(x) - f(x) > 0$	$g(x) = \frac{f(x)}{x}$
6	$xf'(x) + nf(x) > 0$	$g(x) = x^n f(x)$
7	$xf'(x) - nf(x) > 0$	$g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$
8	$f'(x) + f(x) > 0$	$g(x) = e^x f(x)$
9	$f'(x) - f(x) > 0$	$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$
10	$f'(x) + kf(x) > 0$	$g(x) = e^{kx} f(x)$

续表

序号	模型	函数
11	$f'(x) - kf(x) > 0$	$g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}}$
12	$f'(x) + f(x) \ln a > 0$	$g(x) = a^x f(x)$
13	$f'(x) + f(x) > a$	$g(x) = e^x [f(x) - a]$
14	$f'(x) - f(x) > a$	$g(x) = \frac{f(x) + a}{e^x}$
15	$\begin{cases} f'(x) \sin x + \\ f(x) \cos x > 0 \end{cases}$	$g(x) = f(x) \sin x$
16	$\begin{cases} f'(x) \sin x - \\ f(x) \cos x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$
17	$\begin{cases} f'(x) \cos x - \\ f(x) \sin x > 0 \end{cases}$	$g(x) = f(x) \cos x$
18	$\begin{cases} f'(x) \cos x + \\ f(x) \sin x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$
19	$x \ln x \cdot f'(x) + f(x) > 0$	$g(x) = f(x) \ln x$
20	$x \ln x \cdot f'(x) - f(x) > 0$	$g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$

表中1—3是四则运算模型;4—7是幂函数模型,构造的函数都是 $x^a f(x)$ 的形式, a 的值由模型中 $f(x)$ 的系数决定;8—11是指数函数模型,构造的函数都是 $e^{kx} f(x)$ 或 $\frac{f(x)}{e^{kx}}$ 的形式, k 的值同样由模型中 $f(x)$ 的系数决定;15—18是三角函数模型,可参考四则运算模型中的乘法和除法记忆;19—20是对数函数模型.

3. C 【解析】因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,此时 $2f(0)=3 \times 0=0$,不符合题意.当 $x \neq 0$ 时,设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$,定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,关于原点对称, $F(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=F(x)$,所以 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 为偶函数, $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)-xf'(x) < 0$,则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} > 0$,故 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $2f(x) > 3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{3}{2} \Rightarrow F(x) > \frac{3}{2}$,又 $f(1)=\frac{3}{2}$,所以 $F(1)=f(1)=\frac{3}{2}$,所以 $F(x) > F(1)$,故 $x > 1$.

因为 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 为偶函数,所以 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $2f(x) > 3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} < \frac{3}{2} \Rightarrow F(x) < \frac{3}{2}$,

又 $F(-1)=F(1)=\frac{3}{2}$,所以 $F(x) < \frac{3}{2}$.

 **黑板:** 偶函数的对称性

$F(-1)$,故 $-1 < x < 0$.

综上,不等式 $2f(x) > 3x$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.故选 C.

4. B 【解析】令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$,则 $g'(x)=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$,因为 $f'(x)-2f(x) > 0$, $e^{2x} > 0$,所以 $g'(x) > 0$,所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.又不等式 $e^2 f(\ln(x-1)) < (x-1)^2$ 等价于 $\frac{f(\ln(x-1))}{(x-1)^2} < \frac{1}{e^2}$,

即 $g(\ln(x-1))=\frac{f(\ln(x-1))}{e^{2\ln(x-1)}} < \frac{1}{e^2}$.

$$\frac{f(\ln(x-1))}{[e^{\ln(x-1)}]^2} = \frac{f(\ln(x-1))}{(x-1)^2} < \frac{1}{e^2} = \frac{f(1)}{e^2} = g(1), \text{ 所以 } \ln(x-1) < 1, \text{ 所以 } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 < e, \end{cases} \text{ 解得 } x \in (1, e+1). \text{ 故选 B.}$$

5. D 【解析】设函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $g'(x)=\frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x}$, 因为 $f'(x) \cdot \cos x + f(x)\sin x > 0$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\cos x > 0$, 则不等式 $f(x) > 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x$ 等价于 $\frac{f(x)}{\cos x} > 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

即 $g(x) > g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 由 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 可得 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$,

因此不等式 $f(x) > 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. 故选 D.

6. D 【解析】对于 A, 由 $y > x > 0$, 得 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, A 错误;

对于 B, 取 $y=1, x=e^{-1}$, 则 $x-\ln x=e^{-1}+1 > 1=y-\ln y$, 则 $x+\ln y > y+\ln x$, B 错误;

对于 C, 取 $y=2, x=1$, 则 $x+e^x=1+e > 2+\ln 2=y+\ln y$, C 错误;

对于 D, 令函数 $f(x)=x+\cos x, x > 0$, 求得 $f'(x)=1-\sin x \geq 0$ 且不恒为 0, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 由 $y > x > 0$, 得 $f(y) > f(x)$, 即 $x-\cos y < y-\cos x$, D 正确. 故选 D.

7. D

思路导引 把原不等式变形为

$$\frac{\ln x_2 - 4}{x_2} < \frac{\ln x_1 - 4}{x_1}, \text{ 构造函数 } f(x) = \frac{\ln x - 4}{x}, \text{ 可得 } f(x) \text{ 在 } (a, +\infty) \text{ 上单调递减, 则利用 } f'(x) \leq 0 \text{ 解出 } x \text{ 的取值范围即得 } a \text{ 的取值范围.}$$

【解析】由 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 < 4(x_1 - x_2)$, 可得 $x_1 \ln x_2 - 4x_1 < x_2 \ln x_1 - 4x_2$,

$$\text{即 } \frac{\ln x_2 - 4}{x_2} < \frac{\ln x_1 - 4}{x_1},$$

所以对任意的正实数 $x_1, x_2 \in (a, +\infty)$, 满足当 $x_1 < x_2$ 时, $\frac{\ln x_2 - 4}{x_2} < \frac{\ln x_1 - 4}{x_1}$.

设 $f(x)=\frac{\ln x - 4}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x + 4}{x^2}=\frac{5-\ln x}{x^2} \leq 0$ 在 $(a, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $\ln x \geq 5$ 在 $(a, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $x \geq e^5$, 即实数 a 的取值范围为 $[e^5, +\infty)$, 故选 D.

8. D 【解析】设 $f(x)=\frac{2\ln x}{x}$ ($x > 0$), 则

$$f'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2},$$

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增.

因为 $a=\ln 2=\frac{4\ln 2}{4}=\frac{2\ln 4}{4}=f(4)$, $b=\frac{2\ln 3}{3}=f(3)$, $c=\frac{2}{e}=\frac{2\ln e}{e}=f(e)$, 且 $4 > 3 > e$, 所以 $f(4) < f(3) < f(e)$, 即 $c > b > a$. 故选 D.

规律方法 解决数的比较大小问题, 关键是将数的形式转化为结构一致的形式, 从而确定变量, 构造函数, 利用导数判断其单调性, 进而比较大小.

9. D 【解析】构造函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{\ln x}}$ ($x > 0$), 则 $a=f(2)$, $b=f(e)$, $c=f(\pi)$.

因为 $f'(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} \cdot \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{\ln x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$, 所以当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增;

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $\frac{1}{4} \ln 4 = \frac{1}{2} \ln 2$, 所以 $a=f(2)=f(4)$.

因为 $e < \pi < 4$, 所以 $f(e) > f(\pi) > f(4)$, 即 $b > c > a$. 故选 D.

名师点拨 解答本题的关键是构造

函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) 并转化为指数形式 $f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}}$, 通过求导分析函数 $f(x)$ 的单调性, 进而比较大小.

专题 10 导数与零点的综合

刷难关

1. B 【解析】对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) - 1$.

设 $h(x) = e^x(\cos x - \sin x) - 1$,

则 $h'(x) = e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$.

所以当 x 变化时, $h'(x)$, $h(x)$ 的变化情况如表:

x	$(-\pi, 0)$	0	$(0, \pi)$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	单调递增	极大值	单调递减

又 $h(0) = 0$, 所以当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时, $h(x) \leq 0$ 且等号不恒成立,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上单调递减.

又因为 $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的零点个数为 1. 故选 B.

2. (1) 【证明】对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = -3ax^2 + 2e^x + 2xe^x$,

则 $f'(0) = 2$,

则存在 $m = 0$, 使得曲线 $y = f(x)$ 在点 $(m, f(m))$ 处切线的斜率为定值.

(2) 【解】当 $a > 0$ 时, 由 $f(x) = x(-ax^2 + 2e^x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $a = \frac{2e^x}{x^2}$ ($x \neq 0$).

设函数 $g(x) = \frac{2e^x}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{2e^x(x-2)}{x^3}$,

令 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < 2$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减,

令 $g'(x) > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > 2$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上单调递增.

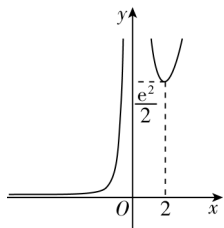
当 $x > 0$ 时, $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{2}$,

若 $x \rightarrow 0^+$, 则 $g(x) \rightarrow +\infty$, 若 $x \rightarrow +\infty$, 则 $g(x) \rightarrow +\infty$.

当 $x < 0$ 时, $g(x) > 0$,

若 $x \rightarrow -\infty$, 则 $g(x) \rightarrow 0$, 若 $x \rightarrow 0^-$, 则 $g(x) \rightarrow +\infty$.

作出 $g(x)$ 的大致图象如图所示,



当 $0 < a < \frac{e^2}{2}$ 时, 方程 $a = \frac{2e^x}{x^2}$ 只有 1 个非零实数解, 则 $f(x)$ 有 2 个零点;

当 $a = \frac{e^2}{2}$ 时, 方程 $a = \frac{2e^x}{x^2}$ 有 2 个不等的非零实数解, 则 $f(x)$ 有 3 个零点;

当 $a > \frac{e^2}{2}$ 时, 方程 $a = \frac{2e^x}{x^2}$ 有 3 个不等的

非零实数解, 则 $f(x)$ 有 4 个零点.

综上所述, 当 $0 < a < \frac{e^2}{2}$ 时, $f(x)$ 零点的

个数为 2; 当 $a = \frac{e^2}{2}$ 时, $f(x)$ 零点的个

数为 3; 当 $a > \frac{e^2}{2}$ 时, $f(x)$ 零点的个数为 4.

归纳总结 利用导数研究函数的零点个数问题的求解策略

(1) 分离参数法: 将参数分离出来, 得到一端是参数, 另一端是变量的表达式, 转化为求解含有变量的表达式对应的函数的最值问题, 从而根据参数的范围与函数的值域判断零点的个数;

(2) 研究含参函数单调性法: 利用导数研究含参函数的单调性, 分析函数的极值与端点、特殊点处函数值的正负, 从而得到函数在各个单调区间上的零点个数, 从而得到函数的零点个数;

(3) 图象法: 对于由两个相对简单的函数加减得到的函数, 可以将两个简单函数分离到等号两侧, 各自作出图象, 通过研究两个函数图象的公共点去研究原函数的零点个数.

3. 【证明】(1) 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 且 $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$,

令 $g(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$,

$\therefore g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(x+1)^2}$,

$\therefore y = \frac{1}{(x+1)^2}$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

$y = -\sin x$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

$\therefore g'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

又 $g'(0) = -\sin 0 + 1 = 1 > 0$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$-\sin \frac{\pi}{2} + \frac{4}{(\pi+2)^2} = \frac{4}{(\pi+2)^2} - 1 < 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (-1, x_0)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 则 $x = x_0$ 为 $g(x)$

唯一的极大值点,

故 $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上存在唯一的极大值点 x_0 .

(2) $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.

①当 $x \in (-1, 0]$ 时, 由 (1) 可知 $f'(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递增,

$\therefore f'(x) \leq f'(0) = 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递减, 又 $f(0) = 0$, $\therefore x = 0$ 为 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上的唯一零点.

②当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上

单调递增, 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 又 $f'(0) = 0$, $\therefore f'(x_0) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 此时 $f(x) > f(0) = 0$, 不存在零点.

又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi+2} = -\frac{2}{\pi+2} < 0$,

$\therefore \exists x_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(x_1) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 (x_0, x_1) 上单调递增, 在 $(x_1, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

又 $f(x_0) > f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} -$

$\ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{2e}{\pi+2} > \ln 1 = 0$,

$\therefore f(x) > 0$ 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 此时不存在零点.

③当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $y = \sin x$ 单调递减, $y = -\ln(x+1)$ 单调递减, $\therefore f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减,

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $f(\pi) = \sin \pi - \ln(\pi+1) = -\ln(\pi+1) < 0$, 即 $f(\pi) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上存在唯一零点.

④当 $x \in (\pi, +\infty)$ 时, $\sin x \in [-1, 1]$, $\ln(x+1) > \ln(\pi+1) > \ln e = 1$, $\therefore \sin x - \ln(x+1) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 上不存在零点.

综上所述, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

名师点拨 对于含正余弦的函数, 其导数中依然含有正余弦, 有时正负多变, 并不统一.

但是正余弦函数具有有界性, 所以当 x 足够大时, 其他函数 (如本题中的 $y = \ln(x+1)$) 已经足够大, 此时不用再通过单调性研究函数, 可以直接从函数值上判断.

具体到解题, 可以通过分类讨论, 在 x 较小时通过导数研究单调性进而研究函数值, 在 x 足够大时直接研究函数值.

4. A 【解析】函数 $f(x) = ae^x - x$ 有两个不同的零点, 即方程 $ae^x - x = 0$ 有两个不同的实数根.

当 $a = 0$ 时, $f(x) = -x$, 只有一个零点 $x = 0$, 不符合题意, 所以 $a \neq 0$.

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ae^x - x = 0$ 等价于 $a = \frac{x}{e^x}$.

令 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则问题转化为直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象有两个不同的交点.

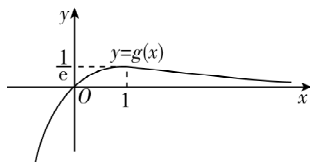
对 $g(x)$ 求导得 $g'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$.

令 $g'(x) = 0$, 得 $x=1$.

当 $x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 极大值为 $g(1) = \frac{1}{e}$. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0^+$. 作出函数 $y=g(x)$ 的大致图象如图所示:



由图象可知, 当直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象有两个不同的交点时,

需满足 $0 < a < \frac{1}{e}$.

故实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{e})$. 故选 A.

5. ABD 【解析】令 $f(x) = e^x - \frac{\ln x + k}{x} - 1 = 0$, 则 $xe^x - x - \ln x - k = 0$,

令 $h(x) = xe^x - x - \ln x - k$, 则 $h'(x) = (x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x} = (x+1)\frac{xe^x - 1}{x}$,

令 $g(x) = xe^x - 1$, $x > 0$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x$,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x) = xe^x - 1$ 为增函数, 又 $g(0) = -1$, $g(1) = e - 1 > 0$,

所以存在 $x_1 \in (0, 1)$, 使得 $g(x_1) = 0$,

即 $x_1 e^{x_1} - 1 = 0$, 即 $x_1 e^{x_1} = 1$,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $g(x) < 0$, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增,

又 $x > 0$ 且 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$.

因为函数 $h(x) = xe^x - x - \ln x - k$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 x_0 , 所以 $x_0 = x_1$,

所以 $x_0 e^{x_0} = 1$, 故 A 正确;

$h(x_1) = 0$, 即 $x_1 e^{x_1} - x_1 - \ln x_1 - k = x_1 e^{x_1} - \ln(x_1 e^{x_1}) - k = 0$, 即 $1 - \ln 1 - k = 0$, 所以 $k = 1$, 故 B 正确;

$f(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x} - 1 (x > 0)$, 则 $f'(x) = e^x + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$,

令 $\varphi(x) = x^2 e^x + \ln x (x > 0)$, 则 $\varphi'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0$,

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $\varphi(\frac{1}{e}) = e^{-1} - 1 < 0$, $\varphi(1) = e >$

0, 所以存在 $x_2 \in (\frac{1}{e}, 1)$, 使得

$\varphi(x_2) = 0$,

则当 $x \in (0, x_2)$ 时, $\varphi(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_2)$ 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 有唯一极值点, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.

6. 【解】 (1) 当 $a=3$ 时, 函数 $f(x) = \ln x + x^2 - 3x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

求导得 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 =$

$\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$. 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$ 时,

$f'(x) > 0$, 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 因

此函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$ 上单

调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{1}{2})$,

$(1, +\infty)$, 单调递减区间是 $(\frac{1}{2}, 1)$.

(2) 函数 $f(x) = (a-2)\ln x + x^2 - ax$, $x \in (0, +\infty)$, 求导得 $f'(x) = \frac{a-2}{x} + 2x - a =$

$\frac{2}{x}(x-1)(x-\frac{a-2}{2})$.

当 $\frac{a-2}{2} \leq 1$, 即 $a \leq 4$ 时, 当 $x \in [1, e]$

时, $f'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,

由函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上恰有一个零点, 得

$\begin{cases} f(1) = 1-a \leq 0, \\ f(e) = e^2 - 2 - (e-1)a \geq 0, \end{cases}$

解得 $1 \leq a \leq \frac{e^2-2}{e-1}$, 因此 $1 \leq a \leq \frac{e^2-2}{e-1}$;

当 $\frac{a-2}{2} > 1$, 即 $a > 4$ 时, 当 $x \in (1, \frac{a-2}{2})$ 时,

$f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $[1, \frac{a-2}{2}]$ 上

单调递减, 又 $f(1) = 1-a < 0$, 要使函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上恰有一个零点,

则 $f(e) \geq 0$, 即 $a \leq \frac{e^2-2}{e-1}$, 与 $a > 4$ 矛盾,

故不能确定 $\frac{a-2}{2}$ 与 e 的大小关

系, 根据 $f(x)$ 在 $[1, \frac{a-2}{2}]$ 上单调递减和

$f(1) < 0$, 知只需右端点处函数值不小于 0 就满足有一个零点

所以 a 的取值范围是 $[1, \frac{e^2-2}{e-1}]$.

规律方法 导函数中两种常用的转化方法: 一是利用导数研究含参函数的单调性, 常转化为不等式恒成立问题, 注意分类讨论与数形结合思想的应用; 二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理.

7. (1) 【解】 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上

单调递增, 理由如下:

因为 $f(x) = x \sin x$,

所以 $f'(x) = \sin x + x \cos x$.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$

在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

(2) 【解】由 (1) 知 $f'(x) = \sin x + x \cos x$, 则 $k = f'(\pi) = -\pi$, 所以 $f(x)$ 的图象在点 $(\pi, 0)$ 处的切线方程为 $y = -\pi(x - \pi)$, 即 $\pi x + y - \pi^2 = 0$.

(3) 【证明】设 $h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$,

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在

$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减.

又 $h(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$, $h(\pi) = -\pi < 0$, 所以在

$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上, $h(x)$ 存在唯一 $x_0 \in$

$(\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $h(x_0) = 0$,

当 x 变化时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上的变化情况如表:

x	$(\frac{\pi}{2}, x_0)$	x_0	(x_0, π)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上有且只有一个极值点.

8. 【解】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $m = -1$ 时, $f(x) = \ln x - x^2 - x + 1$,

则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x - 1 = -\frac{(x+1)(2x-1)}{x}$,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在

$(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增;

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在

$(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得极大值, 极

大值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \ln 2$, 无极小值.

(2) 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2mx +$

$2m + 1 = \frac{2mx^2 + (2m+1)x + 1}{x} =$

$\frac{(2mx+1)(x+1)}{x} (x > 0)$,

若 $m \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

若 $m < 0$, 则当 $0 < x < -\frac{1}{2m}$ 时, $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2m})$ 上单调递增;

当 $-\frac{1}{2m} < x$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2m}, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $m \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2m})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2m}, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 因为对任意 $x > 0$, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 所以 $m(x^2 + 2x) \leq -\ln x - x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

即 $m \leq -\frac{\ln x + x + 1}{x^2 + 2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

设 $F(x) = -\frac{\ln x + x + 1}{x^2 + 2x}$, 则 $F'(x) = \frac{(x+1)(x+2\ln x)}{(x^2+2x)^2}$.

设 $\varphi(x) = x + 2\ln x$, 则 $\varphi'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $\varphi(1) = 1 > 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 2\ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2\ln 2 < 0$,

所以 $\exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 即 $x_0 + 2\ln x_0 = 0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi(x) < 0$,

则 $F'(x) < 0$;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$,

则 $F'(x) > 0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x)_{\min} = F(x_0) = -\frac{\ln x_0 + x_0 + 1}{x_0^2 + 2x_0} = -\frac{1}{2x_0}$.

因为 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 所以 $-\frac{1}{2x_0} \in (-1, -\frac{1}{2})$, 所以 $m \leq -1$,

故整数 m 的最大值为 -1 .

9. (1) 【解】当 $a = 0$ 时, $f(x) = \sin x - x \cos x$, $f'(x) = x \sin x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = \frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2})$, 即 $\frac{\pi}{2}x - y - \frac{\pi^2}{4} + 1 = 0$.

(2) 【解】 $f(x) = \sin x - x \cos x + ax$, 则 $f'(x) = x \sin x + a$, 且 $f(0) = 0$.

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) = x \sin x + a > 0$ 在 $(0, \pi)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 单调递增, 此时 $f(x) > f(0) = 0$ 恒成立.

当 $a < 0$ 时, $f'(0) = a < 0$,

当 $x \in (0, \pi)$ 时, $0 < \sin x \leq 1$, 所以 $f'(x) = x \sin x + a \leq x + a$, 则在 $(0, -a)$ 上, $f'(x) = x \sin x + a \leq x + a < 0$,

记 $I = (0, \pi) \cap (0, -a)$, 则当 $x \in I$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 此时 $f(x) < f(0) = 0$, 不符合题意.

故实数 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

(3) 【证明】当 $a = -1$ 时, $f(x) = \sin x - x \cos x - x$,

令 $F(x) = \sin x - x$, 则 $F(0) = 0$, $F'(x) = \cos x - 1$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减,

所以在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, $\sin x - x < 0$, 且

$x \cos x > 0$, 易得 $f(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上没有零点, 故

只需证明 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上有且只有一个零点.

令 $g(x) = f'(x) = x \sin x - 1$, $h(x) = g'(x) = \sin x + x \cos x$,

则在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上, $h'(x) = 2 \cos x - x \sin x < 0$ 恒成立, $h(x)$ 单调递减,

又因为 $h(\frac{\pi}{2}) = 1$, $h(\pi) = -\pi$,

所以存在 $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 使得 $h(x_1) = 0$, 在 $(\frac{\pi}{2}, x_1)$ 上, $h(x) > 0$, 在 (x_1, π) 上, $h(x) < 0$,

因此 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, x_1)$ 上单调递增, 在 (x_1, π) 上单调递减, $g(x_1) > g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $g(\pi) = -1$,

所以存在 $x_2 \in (x_1, \pi)$ 使得 $g(x_2) = 0$, 在 $(\frac{\pi}{2}, x_2)$ 上, $g(x) > 0$, 在 (x_2, π) 上, $g(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, x_2)$ 上单调递增, 在 (x_2, π) 上单调递减, 且 $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$, $f(x_2) > f(\pi) = 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, x_2)$ 使得 $f(x_0) = 0$, 且 $f(x)$ 在 (x_2, π) 上没有零点.

综上所述, $a = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且只有一个零点.

专题 11 导数中的指对同构问题

刷难关

1. 【解】(1) 显然 $x > 0$, 则 $\log_2 x - k \cdot 2^{kx} \geq 0 \Leftrightarrow x \log_2 x \geq kx \cdot 2^{kx} \Leftrightarrow (\log_2 x) \cdot 2^{\log_2 x} \geq kx \cdot 2^{kx}$, 同构函数为 $f(x) = x \cdot 2^x$.

(2) 显然 $x > 0$, 则 $e^{2\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \ln \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{2\lambda} \ln x \Leftrightarrow 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq x \ln x \Leftrightarrow 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq (\ln x) e^{\ln x}$, 同构函数为 $g(x) = x e^x$.

(3) 显然 $x > 0$, 则 $x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow \ln x + \ln(\ln x) \geq \frac{m}{x} + \ln \frac{m}{x}$, 同构函数为 $h(x) = x + \ln x$.

(4) 显然 $x > 0$, 则 $a(e^{\alpha x} + 1) \geq 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x \Leftrightarrow a x e^{\alpha x} + a x \geq 2x^2 \ln x + 2 \ln x = x^2 \ln x^2 + \ln x^2 \Leftrightarrow a x \cdot e^{\alpha x} + a x \geq \ln x^2 \cdot$

$e^{\ln x^2} + \ln x^2$, 同构函数为 $u(x) = x e^x + x$.

(5) 显然 $x > 1$, $a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a x + 2e^x \Leftrightarrow a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a \ln e^x + 2e^x$, 同构函数为 $v(x) = a \ln x + 2x$.

(6) $x > 1$, $x + a \ln x + e^{-x} \geq x^a \Leftrightarrow x + e^{-x} \geq x^a - \ln x^a \Leftrightarrow e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^a - \ln x^a$, 同构函数为 $r(x) = x - \ln x$.

归纳总结 指对同构的常用形式

(1) 积型: $a e^a \leq b \ln b (b > 0)$

① 构造形式为 $a e^a \leq (\ln b) e^{\ln b}$, 构造函数 $f(x) = x e^x$;

② 构造形式为 $e^a \ln e^a \leq b \ln b$, 构造函数 $f(x) = x \ln x$;

③ 当 $a > 0, b > 1$ 时, 构造形式为 $a + \ln a \leq \ln b + \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x + \ln x$.

(2) 商型: $\frac{e^a}{a} \leq \frac{b}{\ln b} (a \neq 0, b > 0 \text{ 且 } b \neq 1)$

① 构造形式为 $\frac{e^a}{a} \leq \frac{e^{\ln b}}{\ln b}$, 构造函数

$f(x) = \frac{e^x}{x}$;

② 构造形式为 $\frac{e^a}{\ln e^a} \leq \frac{b}{\ln b}$, 构造函数

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

③ 当 $a > 0, b > 1$ 时, 构造形式为 $a - \ln a \leq \ln b - \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x - \ln x$.

2. D 【解析】因为 $a e^{\alpha^{-3}} = 1$, 所以 $a e^{\alpha} = e^3$, 所以 $\alpha + \ln \alpha = 3$.

因为 $\beta(\ln \beta - 1) = e^4$, 当 $0 < \beta \leq e$ 时, 显然等式不成立, 所以 $\beta > e$,

所以 $\ln \beta + \ln(\ln \beta - 1) = 4$.

观察 $\begin{cases} \alpha + \ln \alpha - 3 = 0, \\ (\ln \beta - 1) + \ln(\ln \beta - 1) - 3 = 0, \end{cases}$

→ 敲黑板: 转化为相同结构的式子, 为构造函数做准备

可知 α 与 $\ln \beta - 1$ 是关于 x 的方程 $x + \ln x - 3 = 0$ 的两根.